Period Math Hung (2015) 70:171–208
DOI 10.1007/s10998-014-0066-8

Sur les entiers ellipséphiques: somme des chiffres et répartition dans les classes de congruence

Karam Aloui

Published online: 6 January 2015

Abstract We generalize a result due to Gelfond concerning the distribution in residue classes of the sum of digits function in the case of integers with missing digits. Besides, we give a similar result to that of Erdős, Mauduit and Sárközy on the uniform distribution of integers with missing digits in arithmetic progressions under a constraint on the sum of digits.

Keywords Sum of digits function · Missing digits · Residue classes · Equidistribution modulo 1

Mathematics Subject Classification 11A07 · 11A25 · 11A63 · 11J71 · 11K36

1 Introduction

Dans tout cet article, on adopte les notations suivantes: on désigne par $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles d'entiers naturels, naturels non nuls, relatifs, réels et complexes respectivement. Etant donné un nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, $\|x\| = \min_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$ et on pose $e(x) = e^{2i\pi x}$. Le *pgcd* de deux nombres entiers a et b est noté (a, b), leur *ppcm* par $[a, b]$ (plus généralement, le pgcd des nombres entiers $a_1, \dots, a_n$ est noté $(a_1, \dots, a_n)$ et leur ppcm $[a_1, \dots, a_n]$), l'ensemble des multiples entiers de a est désigné par $a\mathbb{Z}$ et si $a \le b$, l'ensemble $\{a, a+1, \dots, b\}$ sera noté $[\![a, b]\!]$. Le nombre d'éléments d'un ensemble $\mathcal{A}$ est désigné par $|\mathcal{A}|$. On désigne par $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers distincts du nombre entier n et par

K. Aloui (✉)
Faculté des sciences de Sfax, Université de Sfax, Route de la Soukra km 3.5,
B.P. n 1171, Sfax 3000, Tunisie
e-mail: karam.aloui@etu.univ-amu.fr

K. Aloui
Institut de Mathématiques de Marseille, UMR 6206 CNRS, Université d'Aix-Marseille,
Campus de Luminy, case 907, 13288 Marseille cedex 9, France

$\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n comptés avec leurs multiplicités. On convient que, pour une suite de nombres complexes $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $\sum_{j=m}^{n} a_j = 0$ et $\prod_{j=m}^{n} a_j = 1$ dès que $m > n$.

Soit q un nombre entier ≥ 2, tout nombre entier strictement positif n peut s'écrire de manière unique en base q sous la forme

$$n = \sum_{k=0}^{\nu} a_k q^k, \quad a_k \in \{0, ..., q-1\}, \text{ pour tout } k \in \{0, ..., \nu\}, \text{ et } a_\nu \neq 0.$$

La somme des chiffres du nombre entier n écrit en base q est définie par:

$$S_q(n) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k,$$

que l'on désignera dorénavant, sauf s'il y a un risque de confusion, par $S(n)$.

Afin de détecter les congruences, nous utiliserons la relation d'orthogonalité classique

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} e\left(\frac{j(a-b)}{m}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \equiv b \bmod m \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{Z}). \tag{1.1}$$

On se propose, dans ce travail, d'étudier quelques propriétés arithmétiques des nombres entiers dont l'écriture dans une base fixée n'utilise que les chiffres d'une famille $\mathcal{D}$ donnée. C. Mauduit les a baptisés entiers *ellipséphiques* [3, p. 12] en référence à la superposition des deux mots grecs, $\varepsilon\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\sigma$ (littéralement *manque*) et $\psi\eta\varphi\eta o\nu$ (littéralement *chiffre* au sens antique du petit fragment de pierres) et signifie *qui a des chiffres manquants*.

Dans l'étude de ces propriétés, on va distinguer les cas $0 \in \mathcal{D}$ et $0 \notin \mathcal{D}$ (en effet, les formules sont différentes pour des raisons combinatoires), le dernier cas étant rarement abordé dans les articles antérieurs sur les entiers ellipséphiques (voir [6] par exemple).

En premier lieu, on cherche l'analogue, pour les entiers ellipséphiques, d'un résultat dû à Gelfond concernant la répartition dans les progressions arithmétiques de la suite des nombres entiers dont la somme des chiffres appartient à une classe de congruence fixée. On commence par un peu d'histoire sur la fonction somme des chiffres, on pourra consulter [1, chapitre 3] et [19] pour des informations supplémentaires.

En fait, A. O. Gelfond met en évidence dans [14] les propriétés essentielles de la fonction "somme des chiffres en base q" (q-additivité, q-multiplicativité) et entreprend l'étude statistique des ensembles d'entiers associés.

On écrit, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{Z}$ donnés:

$$\mathcal{U}_{(m,r)}(N) = \{n \ : n \leq N, \ S(n) \equiv r \bmod m\}.$$

La structure arithmétique des ensembles $\mathcal{U}_{(m,r)}(N)$ a été étudiée par Gelfond. Son résultat majeur qui prolonge un résultat antérieur dû à Fine [13] s'énonce comme suit: si $m \in \mathbb{N}^*$ est fixé avec $(m, q-1) = 1$, alors pour tout $r \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathcal{U}_{(m,r)}(N)$ est uniformément équiréparti dans les classes de congruence modulo q. Plus précisément,

Théorème A [Gelfond, 1968] *Soient q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $(m, q-1) = 1$, soit $(a, r) \in \mathbb{Z}^2$, alors lorsque $N \longrightarrow \infty$ on a:*

$$\left|\{n \ : n \in \mathcal{U}_{(m,r)}(N), n \equiv a \bmod m'\}\right| = \frac{N}{mm'} + O\left(N^{\lambda_0}\right),$$

où $\lambda_0 = \frac{1}{2\ln q} \ln \frac{q\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2mq}\right)} < 1$.

Notons que l'hypothèse $(m, q-1) = 1$ n'est pas nécessaire mais elle permet d'éviter des cas dégénérés qui conduisent à deux systèmes de congruence sur n. En effet, si on note $(m, q-1) = d > 1$ alors la congruence $q \equiv 1 \bmod d$ implique la congruence $n \equiv S(n) \equiv r \bmod d$.

C'est ce résultat que l'on se propose tout d'abord de généraliser dans le cas d'une suite d'entiers ellipséphiques (ceci fera l'objet du théorème 2.1). Une des différences fondamentales entre ces deux études est la rareté de la suite considérée: dans le travail de Gelfond, la suite a une densité positive alors que dans le notre elle est de densité nulle.

A vrai dire, les entiers ellipséphiques ne forment pas seulement une suite éparse mais présentent aussi l'intérêt d'avoir une structure fractale. Par exemple, les entiers ellipséphiques en base 3 associés à la famille de chiffres $\{0, 2\}$ possèdent une répartition calquée sur celle de l'ensemble de Cantor (après réduction de l'échelle). Leur étude est possible vu que leur fonction génératrice se factorise complètement, ce qui permet de contrôler les irrégularités. Les propriétés arithmétiques des entiers ellipséphiques ont été étudiées intensivement dans plusieurs références. On peut citer notamment les travaux de W. Banks, J. Coquet, C. Dartyge, P. Erdős, M. Filaseta, S. Konyagin, C. Mauduit, A. Sárközy et I. E. Shparlinski (voir [2,5–12,15,16]).

Dans [14], Gelfond parvient à estimer le nombre d'entiers sans facteur puissance z-ième dont la somme des chiffres appartient à une progression arithmétique donnée:

Théorème B [Gelfond 1968] *Soient $q,\ m,\ m'$ et z des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $(m, q-1) = 1$, soit $l \in \mathbb{Z}$. Le nombre d'entiers $n,\ n \leq x$, qui ne sont pas divisibles par la puissance z-ième d'un nombre premier et qui satisfont les conditions*

$$S(n) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k \equiv l \bmod m, \quad n = \sum_{k=0}^{\nu} a_k q^k$$

noté $T_1(x)$ est donné par la formule

$$T_1(x) = \frac{x}{m\zeta(z)} + O(x^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 = \frac{1 + (z-1)\lambda_0}{z},$$

où ζ est la fonction Zêta de Riemann et λ_0 est la constante obtenue dans le théorème **A**.

Ce théorème sera généralisé, pour les entiers ellipséphiques, à travers les théorèmes 2.5 et 2.6.

Dans leurs deux articles [10,11], P. Erdős, C. Mauduit et A. Sárközy ont étudié la répartition des nombres ellipséphiques dans les progressions arithmétiques. Si $q \geq 3, \mathcal{D} \subset \{0, \ldots, q-1\}$, $0 \in \mathcal{D}$ et $2 \leq |\mathcal{D}| \leq q-1$, on désigne par $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)$ l'ensemble des entiers n tels que $n < N$ et $n = \sum_{k=0}^{\nu} a_k q^k$ où $a_k \in \mathcal{D}$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, \nu\}$ et $a_\nu \neq 0$, alors leur théorème principal de l'article [10] s'énonce comme suit:

Théorème C [Erdős, Mauduit, Sárközy 1998] *Il existe des constantes positives $c_1 = c_1(q, |\mathcal{D}|)$, $c_2 = c_2(q, |\mathcal{D}|)$ et $c_3 = c_3(q, |\mathcal{D}|)$ telles que, en écrivant $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_{|\mathcal{D}|}\}$ avec $d_1 = 0$ et $(d_2, \ldots, d_{|\mathcal{D}|}) = 1$, $N \in \mathbb{N}^*, m' \in \mathbb{N}, m' \geq 2$, $((q-1)q, m') = 1$, $m' < \exp(c_1(\ln N)^{\frac{1}{2}})$ et $a \in \mathbb{Z}$, alors:*

$$\left| \left|\{n\ ;\ n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N), n \equiv a \pmod{m'}\}\right| - \frac{1}{m'}|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \right| < c_2 \frac{1}{m'}|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \exp\left(-c_3 \frac{\ln N}{\ln m'}\right).$$

A partir du théorème **C**, il vient que l'ensemble $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)$ est uniformément équiréparti dans la classe de congruence modulo m' si $m' < \exp\left(c_1(q, |\mathcal{D}|)(\ln N)^{\frac{1}{2}}\right)$. Il s'en suit que pour un tel m', $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)$ rencontre chaque classe de congruence modulo m'.

Il est à signaler que S. Col a amélioré l'inégalité du lemme 2 de [10] ce qui permet d'obtenir un résultat plus raffiné (voir [4, corollaire 1]).

Dans la même direction, on peut citer un article de Konyagin (voir [15, théorème 1]), qui s'intéresse à l'étude de la répartition de $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)$ dans les classes de congruence. Ce théorème induit une classe plus large d'entiers m' pour lesquels l'ensemble $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)$ est uniformément équiréparti modulo m'. Signalons que l'intérêt majeur de sa formule, comparée au théorème **C**, réside dans la sommation sur les classes $m' \in \mathcal{M}$ ce qui permet d'atteindre un résultat en moyenne sur les classes de congruence modulo m'.

Le lecteur intéressé pourrait se référer à [4,11,21] et [22] pour des résultats et des détails supplémentaires.

Notre contribution à ce sujet est présentée par le théorème 2.9 qui constitue une généralisation du théorème **C** en imposant une condition supplémentaire sur la somme des chiffres.

2 Énoncé des résultats

Soient a et r des nombres entiers relatifs, q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\{0, 1, ..., q-1\}$ où $|\mathcal{D}| \geq 2$, on désigne par

$$\mathcal{D} - \mathcal{D} := \{|d - d'| \;:\; d \text{ et } d' \in \mathcal{D},\ d \neq d'\},$$

par

$$\delta := \min(\mathcal{D})$$

et pour tout entier $l \in \{0, ..., q\}$, on pose

$$\mathcal{D}_l := \{0, ..., l-1\} \cap \mathcal{D},$$

en particulier $\mathcal{D}_q = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_0 = \varnothing$.

On pose $\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathcal{D}$, i.e:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathcal{D}} : [\![0, q-1]\!] &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathcal{D}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, on pose:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{D}} := \left\{ n \in \mathbb{N},\ n = \sum_{k=0}^{\nu} a_k q^k \text{ où } a_k \in \mathcal{D} \text{ pour tout } k \in \{0, ..., \nu\} \right\}$$

et pour $N \geq 2$, γ un nombre entier strictement positif,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N) &:= \{n < N,\ n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}\}, \\ \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N, a, m', r, m) &:= \{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N),\ n \equiv a \bmod m',\ S(n) \equiv r \bmod m\}, \\ \mathcal{M}_{\mathcal{D},\gamma}(N, r, m) &:= \{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N);\ n,\ n+1,\ ...,\ n+\gamma-1 \text{ ne se divisent pas par} \\ &\qquad \text{la puissance } z\text{-ième d'un nombre premier et } S(n) \equiv r \bmod m\}. \end{aligned}$$

En outre, on désigne par

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \mathcal{T}(\mathcal{D}, q, m, m') \\
&:= \{(t, s) \in \mathbb{N}^2,\ t < m'\,;\ s < m\ :\ \text{pour tout } \tau \in \mathcal{D}-\mathcal{D} \text{ et pour tout } j \in \{0, 1\}, \\
&\qquad (q^j tm + sm')\tau \equiv 0 \bmod mm'\}. \\
\mathcal{H} &= \mathcal{H}(\mathcal{D}, q, m, m') \\
&:= \{(t, s) \in \mathbb{N}^2,\ t < m'\,;\ s < m\,;\ \text{tels qu'il existe } \tau_0 \in \mathcal{D}-\mathcal{D} \text{ vérifiant} \\
&\qquad (q^j tm + sm')\tau_0 \not\equiv 0 \bmod mm',\ \text{pour un nombre fini } \textbf{non nul} \text{ de } j \in \mathbb{N} \\
&\quad \text{et } \forall \tau \in \mathcal{D}-\mathcal{D}\setminus\{\tau_0\},\ (q^j tm + sm')\tau \not\equiv 0 \bmod mm',\ \text{pour un nombre} \\
&\quad \text{fini (éventuellement nul) de } j \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}
$$

Pour $(t, s) \in \mathcal{H}$,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{X} :&= \mathfrak{X}(t, s) \\
&= \{\tau \in \mathcal{D}-\mathcal{D}\,;\ \text{vérifiant } (q^j tm + sm')\tau \not\equiv 0 \bmod mm',\ \text{pour un nombre} \\
&\qquad \text{fini } \textbf{non nul} \text{ de } j \in \mathbb{N}\}. \\
\mathcal{H}' &= \mathcal{H}'(\mathcal{D}, q, m, m') \\
&:= \{(t, s) \in \mathbb{N}^2,\ t < m'\,;\ s < m\,;\ \text{tels qu'il existe } \tau_0 \in \mathcal{D}-\mathcal{D} \text{ vérifiant} \\
&\qquad (q^j tm + sm')\tau_0 \not\equiv 0 \bmod mm',\ \text{pour une infinité de } j \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}
$$

Il est à noter que ces ensembles sont cruciaux pour la preuve du théorème 2.1 et du corollaire 2.3. En particulier l'ensemble $\mathcal{T}$ est non vide puisqu'il contient déjà l'élément $(0, 0)$ et les ensembles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{H}$ vont constituer la partie principale des théorèmes suivants tandis que ceux de $\mathcal{H}'$ en constituent la partie secondaire.

On convient de noter pour des paramètres entiers a, b, c, d (b et d étant non nuls), $N = l_\nu q^\nu + \ldots + l_1 q + l_0$ avec $l_i \in \{0, \ldots, q-1\}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, \nu\}$ et $n_1 \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(N, a, b, c, d) &:= \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} \sum_{k=1}^{\nu} |\mathcal{D}|^k \Bigg[\sin\left(\pi\delta\left(\left(q^k + \ldots + q^\nu\right)\frac{t}{b} + (\nu - k + 1)\frac{s}{d}\right)\right) \\
&\quad \times \sin\left(\pi\left(\left(\delta\left(2 + \ldots + 2q^{k-1} + q^k + \ldots + q^\nu\right)\frac{t}{b} + (\nu + k + 1)\frac{s}{d}\right) - \frac{2at}{b} - \frac{2cs}{d}\right)\right)\Bigg], \\
\sigma_2(N, a, b, c, d) &:= \sum_{(t,s)\in\mathcal{H}} e\left(\delta\left((q^{n_1} + \ldots + q^\nu)\frac{t}{b} + (\nu + 1 - n_1)\frac{s}{d}\right) - \frac{ta}{b} - \frac{sc}{d}\right) \\
&\quad \times \left(|\mathcal{D}_{l_\nu}||\mathcal{D}|^{\nu - n_1} + \sum_{k=n_1}^{\nu-1} |\mathcal{D}_{l_k}||\mathcal{D}|^{k - n_1} \prod_{j=k+1}^{\nu} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right) \\
&\quad \times \prod_{j=0}^{n_1 - 1}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{b} + \frac{s}{d}\right)\right)\right),
\end{aligned}
$$

$$\sigma_3(N,a,b,c,d) := \sum_{(t,s)\in\mathcal{H}} \Bigg[\prod_{j=0}^{n_1-1} \Bigg(\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j \frac{t}{b} + \frac{s}{d} \right)\right)\Bigg)$$
$$\times \sum_{k=n_1}^{\nu-1} |\mathcal{D}|^{k-n_1+1} e\left(\delta\left((q^{n_1}+\ldots+q^k)\frac{t}{b} + (k+1-n_1)\frac{s}{d}\right) - \frac{ta}{b} - \frac{sc}{d}\right)\Bigg],$$

et

$$\mathfrak{S}(N,a,b,c,d) := 2\sigma_1(N,a,b,c,d) + \sigma_2(N,a,b,c,d) + \sigma_3(N,a,b,c,d).$$

Notre travail est décomposé comme suit:

Dans le paragraphe 3, on présente quelques lemmes techniques concernant les sommes d'exponentielles dont on aura besoin pour établir les théorèmes des paragraphes suivants.

L'objet du paragraphe 4 est de donner quelques propriétés des ensembles $\mathcal{T}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ que l'on exploitera par la suite dans le paragraphe 6.

Le paragraphe 5 est destiné à la présentation de quelques exemples illustratifs concernant les propriétés fondamentales des ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ dans le but d'assimiler les preuves exposées au paragraphe suivant.

Dans le paragraphe 6, on présente notre premier théorème qui est une extension du théorème **A** dans le cas des entiers ellipséphiques et s'énonce comme suit:

Théorème 2.1 *Soient* $(a,r)\in\mathbb{Z}^2$, q, m *et* m' *des nombres entiers supérieurs ou égaux à* 2. *On écrit* $N = l_\nu q^\nu + \ldots + l_1 q + l_0$ *avec* $l_i \in \{0,\ldots,q-1\}$ *pour tout* $i\in\{0,\ldots,\nu\}$, *alors il existe un nombre entier* $n_1(\mathcal{H},\mathfrak{X}) \geq 1$ *tel que:*

$$\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N,a,m',r,m\right)\right|$$
$$= \frac{|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|}{mm'} \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} \cos\left(2\pi\left(\delta\left((1+\ldots+q^\nu)\frac{t}{m'} + (\nu+1)\frac{s}{m}\right) - a\frac{t}{m'} - r\frac{s}{m}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{mm'}\,\mathfrak{S}(N,a,m',r,m) + O_{q,m,m'}\left(N^{\lambda\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}\right),$$

où $\lambda = \frac{1}{T} + \frac{\ln\rho}{\ln|\mathcal{D}|}(1-\frac{1}{T}) < 1$, $\rho = \begin{cases} \alpha = \max\limits_{j\in\mathbb{N},\,(t,s)\in\mathcal{H}'} \left|\sum\limits_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right| & si\ \alpha\notin\{0,1\},\\ \frac{3}{2} & sinon,\end{cases}$

la constante T *étant définie dans la proposition* 4.11.

Il est à noter que sous certaines contraintes sur m, m', q et $\mathcal{D}$ (que l'on verra dans la proposition 4.9), on peut tirer une condition suffisante pour que $\mathcal{T} = \{(0,0)\}$ et $\mathcal{H} = \varnothing$, auquel cas le théorème 2.1 conduit à la formule suivante mettant en évidence une répartition uniforme de $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)$ modulo mm':

Corollaire 2.2 *Soient* $(a,r)\in\mathbb{Z}^2$, q, m *et* m' *des nombres entiers supérieurs ou égaux à* 2. *On suppose que* $(m',q) = (m,q-1) = 1$ *et que* $\mathcal{D}-\mathcal{D}$ *contient un élément premier avec* $[m,m']$, *alors il existe un réel* $\lambda < 1$ *tel que:*

$$\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N,a,m',r,m\right)\right| = \frac{|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|}{mm'} + O_{q,m,m'}\left(N^{\lambda\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}\right).$$

Lorsque $0\in\mathcal{D}$ la formule énoncée au théorème 2.1 s'exprime sous la forme suivante:

Corollaire 2.3 *Soient* $(a,r)\in\mathbb{Z}^2$, q, m *et* m' *des nombres entiers supérieurs ou égaux à* 2. *On suppose que* $0\in\mathcal{D}$, *on écrit* $N = l_1 q^{\nu_1} + \ldots + l_L q^{\nu_L}$ *avec* $\nu_1 > \ldots > \nu_L$ *et*

$l_i \in \{1, ..., q-1\}$ pour tout $i \in \{1, ..., L\}$, alors il existe un nombre entier $n_1(\mathcal{H}, \mathfrak{X}) \geq 1$, un nombre entier $k_0 \in \{2, ..., L\}$ tel que $\nu_{k_0} > n_1 \geq \nu_{k_0+1}$ et un réel $\lambda < 1$ tels que:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N, a, m', r, m\right)\right| \\
&= \frac{|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|}{mm'} \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} \cos\left(2\pi\left(\frac{ta}{m'} + \frac{sr}{m}\right)\right) + \frac{1}{mm'} \sum_{(t,s)\in\mathcal{H}} e\left(-\frac{ta}{m'} - \frac{sr}{m}\right) \\
&\times \Bigg[\left(|\mathcal{D}_{l_1}||\mathcal{D}|^{\nu_1 - n_1} + \sum_{k=1}^{k_0-1}\left(\prod_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right)|\mathcal{D}_{l_{k+1}}||\mathcal{D}|^{\nu_{k+1}-n_1}\right) \\
&\times \prod_{j=0}^{n_1-1}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'} + \frac{s}{m}\right)\right)\right)\Bigg] + O_{q,m,m'}\left(N^{\lambda\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}\right).
\end{aligned}$$

λ étant la constante citée au théorème 2.1.

Cette formule se simplifie de manière considérable lorsque $\mathcal{D} = \{0, ..., q-1\}$. En fait, dans ce cas on retrouve le théorème **A**.

Corollaire 2.4 *Soient $(a, r) \in \mathbb{Z}^2$, q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2 avec $(m, q-1) = 1$. On suppose que $\mathcal{D} = \{0, \ldots, q-1\}$, alors:*

$$\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N, a, m', r, m\right)\right| = \frac{N}{mm'} + O_{q,m,m'}\left(N^{\lambda_0}\right),$$

où λ_0 est la constante exprimée dans le théorème **A**.

Dans le paragraphe 7, on s'intéresse à l'analogue du théorème **B**, pour les entiers ellipséphiques:

Théorème 2.5 *Soient $r \in \mathbb{Z}$, q, m et z des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $0 \notin \mathcal{D}$, alors*

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{M}_{\mathcal{D},1}(N, r, m)| \\
&= \frac{1}{m\zeta(z)}\Bigg[|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} \cos\left(2\pi\left(\delta\left((1 + ... + q^{\nu})\frac{t}{d^z} + (\nu+1)\frac{s}{m}\right) - r\frac{s}{m}\right)\right) \\
&\qquad + \mathfrak{S}(N, 0, d^z, r, m)\Bigg] + O\left(N^{\frac{1}{z}+\lambda(1-\frac{1}{z})\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}\right),
\end{aligned}$$

où λ est la constante citée au théorème 2.1.

Théorème 2.6 *Soient $r \in \mathbb{Z}$, q, m et z des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $0 \in \mathcal{D}$, alors*

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{\mathcal{D},1}(N, r, m)| = \frac{1}{m\zeta(z)}\Bigg\{&|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} \cos\left(2\pi\frac{sr}{m}\right) + \sum_{(t,s)\in\mathcal{H}} e\left(-\frac{sr}{m}\right) \\
&\times \Bigg[\left(|\mathcal{D}_{l_1}||\mathcal{D}|^{\nu_1-n_1} + \sum_{k=1}^{k_0-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right)|\mathcal{D}_{l_{k+1}}||\mathcal{D}|^{\nu_{k+1}-n_1}\right) \\
&\times \prod_{j=0}^{n_1-1}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{d^z} + \frac{s}{m}\right)\right)\right)\Bigg]\Bigg\} + O\left(N^{\frac{1}{z}+\lambda(1-\frac{1}{z})\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}\right),
\end{aligned}$$

où λ est la constante définie dans le théorème 2.1.

De la même manière, on peut montrer les corollaires suivants

Corollaire 2.7 *Soient $r \in \mathbb{Z}$, q, m et z des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2, soit γ un nombre entier strictement positif. On suppose que $0 \notin \mathcal{D}$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{M}_{\mathcal{D},\gamma}(N,r,m)\right| \\
&= \frac{1}{m(\zeta(z))^{\gamma}}\left[|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} \cos\left(2\pi\left(\delta\left((1+\ldots+q^{\nu})\frac{t}{d^z}+(\nu+1)\frac{s}{m}\right)-r\frac{s}{m}\right)\right)\right. \\
&\quad \left. + \mathfrak{S}(N,0,d^z,r,m)\right] + O\left(N^{\frac{1}{z}+\lambda(1-\frac{1}{z})\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}\right).
\end{aligned}$$

λ étant la constante impliquée dans le théorème 2.1.

Corollaire 2.8 *Soient $r \in \mathbb{Z}$, q, m et z des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2, soit γ un nombre entier strictement positif. On suppose que $0 \in \mathcal{D}$, alors*

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{M}_{\mathcal{D},\gamma}(N,r,m)\right| &= \frac{1}{m(\zeta(z))^{\gamma}}\left\{|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} \cos\left(2\pi\frac{sr}{m}\right) + \sum_{(t,s)\in\mathcal{H}} e\left(-\frac{sr}{m}\right)\right. \\
&\quad \times\left[\left(|\mathcal{D}_{l_1}||\mathcal{D}|^{\nu_1-n_1} + \sum_{k=1}^{k_0-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right)|\mathcal{D}_{l_{k+1}}||\mathcal{D}|^{\nu_{k+1}-n_1}\right)\right. \\
&\quad \left.\left.\times\prod_{j=0}^{n_1-1}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{d^z}+\frac{s}{m}\right)\right)\right)\right]\right\} + O\left(N^{\frac{1}{z}+\lambda(1-\frac{1}{z})\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}\right).
\end{aligned}$$

λ étant la constante impliquée dans le théorème 2.1.

Au paragraphe 8, on ajoute au théorème **C** une contrainte de congruence sur la somme des chiffres dans l'ensemble $\{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N) \ : n \equiv a \bmod m'\}$ et on obtient notre troisième théorème:

Théorème 2.9 *Soient $q \geq 3$, $\mathcal{D} \subset \{0,\ldots,q-1\}$, $0 \in \mathcal{D}$ et $2 \leq |\mathcal{D}| \leq q-1$, il existe des constantes positives $k_1 = k_1(q,|\mathcal{D}|)$, $k_2 = k_2(q,|\mathcal{D}|)$ et $k_3 = k_3(q,|\mathcal{D}|)$ telles que, en écrivant $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_{|\mathcal{D}|}\}$ avec $d_1 = 0$ et $(d_2,\ldots,d_{|\mathcal{D}|}) = 1$, $N \in \mathbb{N}^*$, m et $m' \in \mathbb{N}$ tels que $m, m' \geq 2$, $(q,m') = 1$ et $(q-1)\frac{t}{m'} \notin \mathbb{Z}$, $\forall t \in \{1,\ldots,m'-1\}$, $d_2\frac{s}{m} \notin \mathbb{Z}$, $\forall s \in \{1,\ldots,m-1\}$,*

$$mm' < \exp\left(k_1(\ln N)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{2.1}$$

et $(a,r) \in \mathbb{Z}^2$, alors:

$$\left|\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N,a,m',r,m)\right| - \frac{1}{mm'}|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|\right| < k_2\frac{1}{mm'}|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|\exp\left(-k_3\frac{\ln N}{\ln mm'}\right). \tag{2.2}$$

A partir de ce théorème, on établit que l'ensemble $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)$ est uniformément équiréparti dans les classes de congruence modulo mm' sous réserve d'avoir $mm' < \exp(k(q,\mathcal{D})(\ln N)^{\frac{1}{2}})$. Il en découle que pour de tels m et m', l'ensemble $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)$ rencontre chaque classe de congruence modulo mm'.

3 Lemmes préliminaires

On introduit la fonction T_N à valeurs complexes définie pour tout nombre entier N, pour tous réels α, β et pour toute partie non vide $\mathcal{D}$ de $\{0, ..., q-1\}$ par:

$$T_N(\alpha, \beta) = T_N(\mathcal{D}, \alpha, \beta) := \sum_{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} e\left(n\alpha + S(n)\beta\right). \tag{3.1}$$

Le fonction T_N permettra de cribler les éléments de $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N, a, m', r, m\right)$. En effet,

Lemme 3.1 *Soient q, m' et m des nombres entiers ≥ 2 et soit $(a, r) \in \mathbb{Z}^2$. Soit N un nombre entier naturel. Alors, on a*

$$\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N, a, m', r, m\right)\right| = \frac{1}{mm'} \sum_{t=0}^{m'-1} e\left(-\frac{ta}{m'}\right) \sum_{s=0}^{m-1} e\left(-\frac{sr}{m}\right) T_N\left(\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right).$$

Preuve Il est clair grâce à la relation d'orthogonalité (1.1) que

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N, a, m', r, m\right)\right| &= \sum_{\substack{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N) \\ n \equiv a \bmod m' \\ S(n) \equiv r \bmod m}} 1 \\
&= \frac{1}{mm'} \sum_{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} \sum_{t=0}^{m'-1} e\left(t\, \frac{n-a}{m'}\right) \sum_{s=0}^{m-1} e\left(s\, \frac{S(n)-r}{m}\right) \\
&= \frac{1}{mm'} \sum_{t=0}^{m'-1} e\left(-\frac{ta}{m'}\right) \sum_{s=0}^{m-1} e\left(-\frac{sr}{m}\right) T_N\left(\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right).
\end{aligned}$$

□

Puis, on passe au lemme suivant qui précise le cardinal de $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)$ pour un nombre entier $N \geq 2$ lorsque $0 \in \mathcal{D}$.

Lemme 3.2 *Soit $\mathcal{D} \subset \{0, ..., q-1\}$ tel que $0 \in \mathcal{D}$. Pour tout nombre entier $N = l_1 q^{\nu_1} + ... + l_L q^{\nu_L}$ avec $\nu_1 > ... > \nu_L$ et $l_i \in \{1, ..., q-1\}$ pour tout $i \in \{1, ..., L\}$ on a*

$$|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| = |\mathcal{D}_{l_1}||\mathcal{D}|^{\nu_1} + \sum_{k=1}^{L-1} \left(\prod_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right) |\mathcal{D}_{l_{k+1}}||\mathcal{D}|^{\nu_{k+1}}.$$

Preuve On peut écrire $N = l_1 q^{\nu_1} + N'$ avec $\nu_1 = \left\lfloor \frac{\ln N}{\ln q} \right\rfloor$, $N' < q^{\nu_1}$ et $l_1 \in [\![1, q-1]\!]$. Il est évident que

$$|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| = |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(l_1 q^{\nu_1})| + \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_1) |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N')|.$$

En itérant le procédé, on aboutit à

$$|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| = |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(l_1 q^{\nu_1})| + \sum_{k=1}^{L-1} \left(\prod_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right) |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(l_{k+1} q^{\nu_{k+1}})|. \tag{3.2}$$

Soit ν un nombre entier naturel et soit $l \in \{1, ..., q-1\}$, on sépare les entiers inférieurs strictement à lq^ν en deux ensembles: les entiers inférieurs strictement à q^ν et les entiers entre q^ν et lq^ν. Il s'en suit l'identité

$$|\mathcal{W}_\mathcal{D}(lq^\nu)| = |\mathcal{W}_\mathcal{D}(q^\nu)| + (|\mathcal{D}_l| - 1)|\mathcal{D}|^\nu = |\mathcal{D}_l||\mathcal{D}|^\nu. \tag{3.3}$$

En injectant (3.3) dans (3.2), on arrive à la conclusion demandée. □

Ensuite, on cherche à simplifier l'expression de la fonction T_N lorsque $0 \in \mathcal{D}$.

Lemme 3.3 *Soit $\mathcal{D} \subset \{0, ..., q-1\}$ tel que $0 \in \mathcal{D}$. Alors, pour tous réels α, β, pour tout nombre entier $N = l_1 q^{\nu_1} + ... + l_L q^{\nu_L}$ avec $\nu_1 > ... > \nu_L$ et $l_i \in \{1, ..., q-1\}$ pour tout $i \in \{1, ..., L\}$, il vient que*

$$\begin{aligned} T_N(\alpha, \beta) = &\left(\sum_{d \in \mathcal{D}_{l_1}} e(d(q^{\nu_1}\alpha + \beta))\right) \prod_{j=0}^{\nu_1 - 1} \left(\sum_{d \in \mathcal{D}} e(d(q^j \alpha + \beta))\right) \\ &+ \sum_{1 \le k \le L-1} \left[\prod_{1 \le j \le k} \left(\mathbb{1}_\mathcal{D}(l_j) e(l_j q^{\nu_j}\alpha + l_j \beta)\right)\right] \left(\sum_{d \in \mathcal{D}_{l_{k+1}}} e(d(q^{\nu_{k+1}}\alpha + \beta))\right) \\ &\times \prod_{j=0}^{\nu_{k+1}-1} \left(\sum_{d \in \mathcal{D}} e(d(q^j \alpha + \beta))\right). \end{aligned}$$

Preuve On écrit $N = l_1 q^{\nu_1} + N'$ avec $\nu_1 = \left\lfloor \frac{\ln N}{\ln q} \right\rfloor$, $N' < q^{\nu_1}$ et $l_1 \in [\![1, q-1]\!]$. Clairement

$$T_N(\alpha, \beta) = T_{l_1 q^{\nu_1}}(\alpha, \beta) + \sum_{\substack{l_1 q^{\nu_1} \le n < l_1 q^{\nu_1} + N' \\ n \in \mathcal{W}_\mathcal{D}}} e(n\alpha + S(n)\beta).$$

Mais, si $l_1 \notin \mathcal{D}$ la deuxième somme est nulle et l'expression se réduit à $T_{l_1 q^{\nu_1}}(\alpha, \beta)$.

Dans le cas contraire, on écrit:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{l_1 q^{\nu_1} \le n < l_1 q^{\nu_1} + N' \\ n \in \mathcal{W}_\mathcal{D}}} e(n\alpha + S(n)\beta) &= \sum_{n \in \mathcal{W}_\mathcal{D}(N')} e((n + l_1 q^{\nu_1})\alpha + S(n + l_1 q^{\nu_1})\beta) \\ &= e(l_1(q^{\nu_1}\alpha + \beta)) T_{N'}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

D'où

$$T_N(\alpha, \beta) = T_{l_1 q^{\nu_1}}(\alpha, \beta) + \mathbb{1}_\mathcal{D}(l_1) e(l_1 q^{\nu_1}\alpha + l_1 \beta) T_{N'}(\alpha, \beta).$$

En réitérant, il s'en suit que

$$\begin{aligned} T_N(\alpha, \beta) = &T_{l_1 q^{\nu_1}}(\alpha, \beta) + \mathbb{1}_\mathcal{D}(l_1) e(l_1 q^{\nu_1}\alpha + l_1\beta) T_{l_2 q^{\nu_2}}(\alpha, \beta) + ... \\ &+ \mathbb{1}_\mathcal{D}(l_1) ... \mathbb{1}_\mathcal{D}(l_{L-1}) e[(l_1 q^{\nu_1} + ... + l_{L-1} q^{\nu_{L-1}})\alpha + (l_1 + ... + l_{L-1})\beta] \\ &\times T_{l_L q^{\nu_L}}(\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Or, pour tout nombre entier naturel k et pour tout entier $l \in \{2, ..., q-1\}$, on a:

$$\begin{aligned} T_{lq^k}(\alpha, \beta) &= T_{q^k}(\alpha, \beta) + \sum_{\substack{1 \le d < l \\ d \in \mathcal{D}}} \sum_{\substack{dq^k \le n < (d+1)q^k \\ n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}}} e(n\alpha + S(n)\beta) \\ &= T_{q^k}(\alpha, \beta) + \sum_{\substack{1 \le d < l \\ d \in \mathcal{D}}} \sum_{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(q^k)} e((n + dq^k)\alpha + S(n + dq^k)\beta) \\ &= T_{q^k}(\alpha, \beta) + \sum_{\substack{1 \le d < l \\ d \in \mathcal{D}}} e(d(q^k\alpha + \beta)) T_{q^k}(\alpha, \beta) \\ &= T_l(q^k\alpha, \beta) T_{q^k}(\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{3.5}$$

En outre, cette relation est trivialement vraie pour $l = 1$ donc valable pour tout $l \in [\![1, q-1]\!]$. Enfin, on écrit:

$$\begin{aligned} T_{q^{k+1}}(\alpha, \beta) &= \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{m \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(q^k)} e((dq^k + m)\alpha + S(dq^k + m)\beta) \\ &= \sum_{d \in \mathcal{D}} e(d(q^k\alpha + \beta)) T_{q^k}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

On en tire la relation: $T_{q^{k+1}}(\alpha, \beta) = \left(\sum_{d \in \mathcal{D}} e(d(q^k\alpha + \beta)) \right) T_{q^k}(\alpha, \beta)$, qui permet d'affirmer que:

$$T_{q^k}(\alpha, \beta) = \prod_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{d \in \mathcal{D}} e(d(q^j\alpha + \beta)) \right), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

En insérant (3.6) dans (3.5) que l'on injecte dans (3.4), on atteint la formule demandée. □

Maintenant, on énonce un lemme permettant de déterminer le cardinal de $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)$ pour $N \ge 2$ lorsque $0 \notin \mathcal{D}$.

Lemme 3.4 *Soit $\mathcal{D} \subset \{1, ..., q-1\}$. Pour tout nombre entier $N = l_\nu q^\nu + ... + l_1 q + l_0$ avec $l_i \in \{0, ..., q-1\}$ pour tout $i \in \{0, ..., \nu\}$ on a:*

$$|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| = |\mathcal{D}_{l_\nu}||\mathcal{D}|^\nu + \sum_{k=1}^{\nu} |\mathcal{D}|^k + \sum_{k=1}^{\nu} \left(\prod_{j=k}^{\nu} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j) \right) |\mathcal{D}_{l_{k-1}}||\mathcal{D}|^{k-1}.$$

Preuve Soit $N = l_\nu q^\nu + N'$ avec $\nu = \left\lfloor \frac{\ln N}{\ln q} \right\rfloor$, $N' < q^\nu$ et $l_\nu \ne 0$. On écrit $N' = l_{\nu-1}q^{\nu-1} + ... + l_0$ et on divise les éléments de $|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(l_\nu q^\nu + N')|$ en deux ensembles: les entiers inférieurs strictement à $l_\nu q^\nu$ ($|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(l_\nu q^\nu)|$ éléments) et les entiers entre $l_\nu q^\nu$ et $l_\nu q^\nu + N'$,

- ∘ si $N' < q^{\nu-1}$, le deuxième ensemble est vide.
- ∘ si $q^{\nu-1} \le N' < q^\nu$ et $l_\nu \notin \mathcal{D}$, le deuxième ensemble est encore vide.
- ∘ si $q^{\nu-1} \le N' < q^\nu$ et $l_\nu \in \mathcal{D}$, le deuxième ensemble contient $\big(|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N')| - |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(q^{\nu-1})|\big)$ éléments.

On pose la fonction

$$\chi_\delta : \{0, ..., q-1\} \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$l \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } l \geq \delta = \min(\mathcal{D}), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il vient alors que

$$|\mathcal{W}_\mathcal{D}(N)| = |\mathcal{W}_\mathcal{D}(l_\nu q^\nu)| + \mathbb{1}_\mathcal{D}(l_\nu)\chi_\delta(l_{\nu-1})\left(|\mathcal{W}_\mathcal{D}(l_{\nu-1}q^{\nu-1} + ... + l_0)| - |\mathcal{W}_\mathcal{D}(q^{\nu-1})|\right). \tag{3.7}$$

Soit k un nombre entier naturel et soit $l \in \{1, ..., q-1\}$, on sépare les éléments de $|\mathcal{W}_\mathcal{D}(lq^k)|$ en deux ensembles : les entiers inférieurs strictement à q^k ($|\mathcal{W}_\mathcal{D}(q^k)|$ éléments) et les entiers entre q^k et lq^k ($|\mathcal{D}_l||\mathcal{D}|^k$ éléments). Il vient alors que

$$|\mathcal{W}_\mathcal{D}(lq^k)| = |\mathcal{W}_\mathcal{D}(q^k)| + |\mathcal{D}_l||\mathcal{D}|^k. \tag{3.8}$$

En itérant le procédé, on insère (3.8) dans (3.7), et compte tenu des identités

$$\mathbb{1}_\mathcal{D}(l)\chi_\delta(l) = \mathbb{1}_\mathcal{D}(l),$$
$$\chi_\delta(l)|\mathcal{D}_l| = |\mathcal{D}_l|,$$

on obtient

$$|\mathcal{W}_\mathcal{D}(N)| = |\mathcal{W}_\mathcal{D}(q^\nu)| + |\mathcal{D}_{l_\nu}||\mathcal{D}|^\nu + \sum_{k=1}^{\nu}\left(\prod_{j=k}^{\nu}\mathbb{1}_\mathcal{D}(l_j)\right)|\mathcal{D}_{l_{k-1}}||\mathcal{D}|^{k-1}. \tag{3.9}$$

Mais, un calcul combinatoire permet d'établir que

$$|\mathcal{W}_\mathcal{D}(q^\nu)| = |\mathcal{D}| + |\mathcal{D}|^2 + ... + |\mathcal{D}|^\nu = \sum_{k=1}^{\nu}|\mathcal{D}|^k. \tag{3.10}$$

Il suffit enfin d'injecter (3.10) dans (3.9) pour conclure. □

Finalement, on termine ce paragraphe par un lemme qui simplifie l'expression de la fonction T_N pour le cas $0 \notin \mathcal{D}$.

Lemme 3.5 *Soit $\mathcal{D} \subset \{1, ..., q-1\}$. Alors, pour tous réels α, β, pour tout nombre entier ν et pour tout nombre entier $N = l_\nu q^\nu + ... + l_1 q + l_0$ avec $l_i \in \{0, ..., q-1\}$ pour tout $i \in \{0, ..., \nu\}$ on a:*

$$\begin{aligned}T_N(\alpha, \beta) = &\sum_{k=0}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{k}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}} e(d(q^j\alpha+\beta))\right) + \left(\sum_{d\in\mathcal{D}_{l_\nu}} e(d(q^\nu\alpha+\beta))\right)\prod_{j=0}^{\nu-1}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}} e(d(q^j\alpha+\beta))\right)\\ &+ \sum_{1\leq k\leq\nu}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}_{l_{k-1}}} e(d(q^{k-1}\alpha+\beta))\right)\prod_{j=0}^{k-2}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}} e(d(q^j\alpha+\beta))\right)\\ &\times\left(\prod_{k\leq j\leq\nu}\mathbb{1}_\mathcal{D}(l_j)e(l_jq^j\alpha+l_j\beta)\right).\end{aligned}$$

Preuve Soit $N = l_\nu q^\nu + N'$ avec $\nu = \left\lfloor \frac{\ln N}{\ln q} \right\rfloor$, $N' < q^\nu$ et $l_\nu \neq 0$. Posons $N' = l_{\nu-1}q^{\nu-1} + \ldots + l_0$, on a:

$$T_{l_\nu q^\nu + N'}(\alpha, \beta) = T_{l_\nu q^\nu}(\alpha, \beta) + \sum_{\substack{l_\nu q^\nu \le n < l_\nu q^\nu + N' \\ n \in \mathcal{W}_\mathcal{D}}} e(n\alpha + S(n)\beta).$$

Mais, si $l_\nu \notin \mathcal{D}$ ou si $N' < q^{\nu-1}$, la deuxième somme est nulle et l'expression se réduit à $T_{l_\nu q^\nu}(\alpha, \beta)$.

Dans le cas contraire, on écrit:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{l_\nu q^\nu \le n < l_\nu q^\nu + N' \\ n \in \mathcal{W}_\mathcal{D}}} e(n\alpha + S(n)\beta) &= \sum_{\substack{q^{\nu-1} \le n < N' \\ n \in \mathcal{W}_\mathcal{D}}} e((n + l_\nu q^\nu)\alpha + S(n + l_\nu q^\nu)\beta) \\ &= e(l_\nu(q^\nu\alpha + \beta))\left(T_{N'}(\alpha, \beta) - T_{q^{\nu-1}}(\alpha, \beta)\right).\end{aligned}$$

En conclusion,

$$T_N(\alpha, \beta) = \begin{cases} T_{l_\nu q^\nu}(\alpha, \beta), & \text{si } N' < q^{\nu-1}, \\ T_{l_\nu q^\nu}(\alpha, \beta) + \mathbb{1}_\mathcal{D}(l_\nu)e(l_\nu q^\nu\alpha + l_\nu\beta) & \\ \quad \times (T_{N'}(\alpha, \beta) - T_{q^{\nu-1}}(\alpha, \beta)), & \text{si } q^{\nu-1} \le N' < q^\nu. \end{cases}$$

On définit la fonction

$$\begin{aligned}\chi_\delta : \{0, \ldots, q-1\} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ l &\longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } l \ge \delta = \min(\mathcal{D}), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}T_N(\alpha, \beta) = T_{l_\nu q^\nu}(\alpha, \beta) &+ \mathbb{1}_\mathcal{D}(l_\nu)\chi_\delta(l_{\nu-1}) \\ &\times e(l_\nu q^\nu\alpha + l_\nu\beta)\left(T_{N'}(\alpha, \beta) - T_{q^{\nu-1}}(\alpha, \beta)\right). \end{aligned}\tag{3.11}$$

Puis, pour tout nombre entier naturel k et pour tout entier $l \in \{2, \ldots, q-1\}$, on écrit :

$$\begin{aligned}T_{lq^k}(\alpha, \beta) &= T_{q^k}(\alpha, \beta) + \sum_{\substack{1 \le d < l \\ d \in \mathcal{D}}} \sum_{\substack{dq^k \le n < (d+1)q^k \\ n \in \mathcal{W}_\mathcal{D}}} e(n\alpha + S(n)\beta) \\ &= T_{q^k}(\alpha, \beta) + \sum_{\substack{1 \le d < l \\ d \in \mathcal{D}}} \sum_{\substack{q^{k-1} \le n < q^k \\ n \in \mathcal{W}_\mathcal{D}}} e((n + dq^k)\alpha + S(n + dq^k)\beta) \\ &= T_{q^k}(\alpha, \beta) + \sum_{1 \le d < l} d \in \mathcal{D}e(d(q^k\alpha + \beta)) \sum_{\substack{q^{k-1} \le n < q^k \\ n \in \mathcal{W}_\mathcal{D}}} e(n\alpha + S(n)\beta) \\ &= T_{q^k}(\alpha, \beta) + T_l(q^k\alpha, \beta)\left(T_{q^k}(\alpha, \beta) - T_{q^{k-1}}(\alpha, \beta)\right).\end{aligned}\tag{3.12}$$

De plus, cette relation est évidemment vraie pour $l = 1$ donc vraie pour tout $l \in [\![1, q-1]\!]$. Ensuite,

$$\begin{aligned} T_{q^{k+1}}(\alpha,\beta) &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{q^j \le n < q^{j+1} \\ n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}}} e(n\alpha + S(n)\beta) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{d\in\mathcal{D}} \sum_{\substack{q^{j-1} \le m < q^j \\ m \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}}} e((dq^j + m)\alpha + S(dq^j + m)\beta) \\ &= \sum_{j=0}^{k} T_q(q^j\alpha,\beta)\left[T_{q^j}(\alpha,\beta) - T_{q^{j-1}}(\alpha,\beta)\right]. \end{aligned}$$

Il vient alors que:

$$T_{q^{k+1}}(\alpha,\beta) = T_{q^k}(\alpha,\beta) + T_q(q^k\alpha,\beta)\left[T_{q^k}(\alpha,\beta) - T_{q^{k-1}}(\alpha,\beta)\right],$$

enfin un raisonnement par récurrence forte sur k permet de conclure que:

$$T_{q^k}(\alpha,\beta) = \sum_{h=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{h} T_q(q^j\alpha,\beta). \tag{3.13}$$

On insère (3.13) dans (3.12) et en notant $N'' = l_{\nu-2}q^{\nu-2} + \ldots + l_0$ dans (3.11), on obtient:

$$\begin{aligned} T_{N'}(\alpha,\beta) - T_{q^{\nu-1}}(\alpha,\beta) = T_{l_{\nu-1}}(q^{\nu-1}\alpha,\beta) \prod_{j=0}^{\nu-2} T_q(q^j\alpha,\beta) + \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_{\nu-1})\chi_\delta(l_{\nu-2}) \\ \times e(l_{\nu-1}(q^{\nu-1}\alpha+\beta))\left(T_{N''}(\alpha,\beta) - T_{q^{\nu-2}}(\alpha,\beta)\right). \end{aligned}$$

On itère le procédé et on reporte dans (3.11) en tenant compte des identités:

$$\chi_\delta(l)T_l(q^l\alpha,\beta) = T_l(q^l\alpha,\beta)$$

et

$$\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l)\chi_\delta(l) = \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l),$$

valables pour tout nombre entier l. On en déduit la formule

$$\begin{aligned} T_N(\alpha,\beta) = T_{l_\nu q^\nu}(\alpha,\beta) + \sum_{1\le k\le\nu} T_{l_{k-1}}\left(q^{k-1}\alpha,\beta\right) \prod_{j=0}^{k-2} T_q(q^j\alpha,\beta) \\ \times\left(\prod_{k\le j\le\nu} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)e(l_jq^j\alpha + l_j\beta)\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

D'où la formule. □

4 Quelques propriétés des ensembles $\mathcal{T}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$

Les ensembles $\mathcal{T}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ ne sont pas d'usage dans la littérature mais ils sont cruciaux pour établir les théorèmes 2.1, 2.5 et 2.6 ainsi que les corollaires 2.3, 2.7 et 2.8. L'objet de ce paragraphe est d'en présenter quelques propriétés qui nous seront utiles pour la suite.

Proposition 4.1 *Les ensembles $\mathcal{T}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont symétriques dans le sens où: si $(t,s) \in \mathcal{T}$ avec $0 \le t < m'$ et $0 \le s < m$ alors $(m'-t, m-s) \in \mathcal{T}$ avec la convention $(m', s) = (0, s)$ et $(t, m) = (t, 0)$.*

Il en est de même pour les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

Proposition 4.2

$$\mathcal{T} = \{(t,s) \in \mathbb{N}^2,\ t < m'\ ;\ s < m\ :\ (q^j tm + sm')\tau \equiv 0 \bmod mm',\ \textit{pour tout}\ \tau \in \mathcal{D} - \mathcal{D}\ \textit{et pour tout}\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Preuve Il s'agit de montrer l'égalité: $\mathcal{A} = \mathcal{T}$, où

$$\mathcal{A} := \{(t,s) \in \mathbb{N}^2,\ t < m'\ ;\ s < m\ :\ (q^j tm + sm')\tau \equiv 0 \bmod mm',\ \text{pour tout}\ \tau \in \mathcal{D} - \mathcal{D}\ \text{et pour tout}\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Soit $(t,s) \in \{(t,s) \in \mathbb{N}^2,\ t < m'\ ;\ s < m\ :\ (q^j tm + sm')\tau \equiv 0 \bmod mm'$, pour tout $\tau \in \mathcal{D} - \mathcal{D}$ et pour tout $j \in \{0,1\}\}$. Pour $j = 0$ et $j = 1$, on obtient

$$\forall \tau \in \mathcal{D} - \mathcal{D},\quad \begin{cases} (tm + sm')\tau \equiv 0 \bmod mm', & (1) \\ (qtm + sm')\tau \equiv 0 \bmod mm'. & (2) \end{cases}$$

En retranchant (1) à partir de (2) on obtient

$$q(q-1)tm\tau \equiv 0 \bmod mm'$$

que l'on ajoute à (2) pour obtenir

$$(q^2 tm + sm')\tau \equiv 0 \bmod mm', \quad \forall \tau \in \mathcal{D} - \mathcal{D}.$$

En réitérant le procédé, on parvient à établir l'inclusion directe, l'inclusion réciproque étant évidente, le résultat s'en suit immédiatement. □

Proposition 4.3 *Soient q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2 avec $(m, q-1) = 1$ (ou $(m, m') = 1$). On suppose que $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ contient un élément τ premier avec $[m, m']$. Alors $\mathcal{T} = \{(0,0)\}$.*

Preuve Clairement $(0,0) \in \mathcal{T}$. Posons alors $(t,s) \in \mathcal{T}$. En mettant $j = 0$ et $j = 1$ et compte tenu de l'hypothèse $(\tau, [m, m']) = 1$, il vient le système d'équations

$$\begin{cases} (tm + sm') \equiv 0 \bmod mm', & (1) \\ (tqm + sm') \equiv 0 \bmod mm'. & (2) \end{cases}$$

Par soustraction de la première équation à partir de la deuxième, on se ramène à

$$t(q-1) \equiv 0 \bmod m',$$

en posant $a = (q-1, m')$, il découle l'existence de m'_1 et q_1 tels que

$$m' = m'_1 a, \quad q - 1 = q_1 a \text{ et } (m'_1, q_1) = 1.$$

On vérifie alors que

$$tq_1 \equiv 0 \bmod m'_1,$$

or $(q_1, m'_1) = 1$ alors $t = km'_1$ pour un certain $k \in [\![0, a-1]\!]$. En reportant dans (1), on trouve

$$sa \equiv 0 \bmod m$$

et vu que $(a, m) = 1$ (puisque $(m, q-1) = 1$) et $0 \leq s < m$, alors $s = 0$. En vertu de l'équation (1), il vient que $m' | t$ avec $0 \leq t < m'$, donc $t = 0$ comme prévu. □

Proposition 4.4 *Soient q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à* 2. *On pose $\Delta = (m, m')$, $M = \dfrac{m}{\Delta}$ et $M' = \dfrac{m'}{\Delta}$. Si $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ contient un élément premier avec $[m, m']$, alors $\mathcal{T} \subset \{0, M, ..., M(\Delta - 1)\} \times \{0, M', ..., M'(\Delta - 1)\}$. En particulier, si $(m, m') = 1$ alors $\mathcal{T} = \{(0, 0)\}$.*

Preuve Soit τ un élément de $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ premier avec $[m, m']$ alors en revenant à la définition de $\mathcal{T}$ et en prenant $j = 0$, on trouve $(tm + sm')\tau \equiv 0 \bmod mm'$.

Or $(\tau, mm') = 1$ alors $mm' | (tm + sm')$ ou encore en simplifiant par $\Delta = (m, m')$,

$$\Delta M M' | (tM + sM').$$

Autrement dit ; $M' | tM$ avec $(M, M') = 1$ donc $t \equiv 0 \bmod M'$ de sorte que $t \in \{0, M', ..., (\Delta - 1)M'\}$ et de manière pareille on montre que $s \in \{0, M, ..., (\Delta - 1)M\}$. □

Proposition 4.5 *Soient q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à* 2, *alors $\mathcal{T} = \{0, ..., m' - 1\} \times \{0, ..., m - 1\}$ si et seulement si $\mathcal{D} - \mathcal{D} \subset [m, m']\mathbb{Z}$.*

Preuve Si $\mathcal{D} - \mathcal{D} \subset [m, m']\mathbb{Z}$, il est clair que $\mathcal{T} = \{0, ..., m' - 1\} \times \{0, ..., m - 1\}$.

Inversement, si $\mathcal{T} = \{0, ..., m' - 1\} \times \{0, ..., m - 1\}$ alors en particulier pour $(t, s) = (0, 1)$, il vient que : $\tau \equiv 0 \bmod m$ de sorte que $m | \tau$, $\forall \tau \in \mathcal{D} - \mathcal{D}$. De plus, en considérant $(t, s) = (1, 0)$ il vient que $\tau \equiv 0 \bmod m'$, $\forall \tau \in \mathcal{D} - \mathcal{D}$ et alors $m' | \tau$, $\forall \tau \in \mathcal{D} - \mathcal{D}$.

En conclusion, $[m, m'] | \tau$, $\forall \tau \in \mathcal{D} - \mathcal{D}$ ce qui implique que $\mathcal{D} - \mathcal{D} \subset [m, m']\mathbb{Z}$. □

Proposition 4.6 *Soient q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à* 2. *Si $\mathcal{H} \neq \emptyset$, alors pour tout $(t, s) \in \mathcal{H}$, il existe $\tau_0 \in \mathfrak{X}$ et un rang $M = M(t, s, \tau_0) \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\begin{cases} (q^j tm + sm')\tau_0 \not\equiv 0 \bmod mm', & \forall j \leq M, \\ (q^j tm + sm')\tau_0 \equiv 0 \bmod mm', & \forall j > M. \end{cases} \tag{4.1}$$

Preuve Soit $(t, s) \in \mathcal{H}$, on considère un élément τ_0 de $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ associé a (t, s) par la définition de $\mathcal{H}$ (un tel τ_0 n'est pas nécessairement unique). On définit alors la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ par $(q^j tm + sm')\tau_0 \equiv u_j \bmod mm'$, $\forall j \in \mathbb{N}$; où les u_j sont pris dans $\{0, ..., mm' - 1\}$.

Par définition des ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathfrak{X}$, la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas pour un nombre fini non nul d'indices j ce qui permet de poser $M = M(t, s, \tau_0) = \max\{j \in \mathbb{N},\ u_j \neq 0\}$. Alors, $\forall j > M\ :\ (q^j tm + sm')\tau_0 \equiv 0 \bmod mm'$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $n_1 < M$ tel que $u_{n_1} = 0$. Les identités

$$\begin{cases} (q^{n_1} tm + sm')\tau_0 \equiv 0 \bmod mm' \\ (q^{M+1} tm + sm')\tau_0 \equiv 0 \bmod mm' \end{cases}$$

impliquent

$$m'|q^{n_1}(q^{M+1-n_1}-1)t\tau_0$$

de sorte que

$$m'|q^{M}(q^{M+1-n_1}-1)t\tau_0.$$

Par conséquent, $u_{2M+1-n_1}=u_M\neq 0$ en contradiction avec la maximalité de M. □

En vertu des propositions 4.2, 4.6 et de la définition des ensembles $\mathcal{T}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$, on conclut que

$$\{0,\dots,m'-1\}\times\{0,\dots,m-1\}=\mathcal{T}\cup\mathcal{H}\cup\mathcal{H}', \tag{4.2}$$

où les éléments de cette réunion sont deux à deux disjoints.

Proposition 4.7 *Soient q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. Si $\mathcal{H}\neq\varnothing$, alors*

- $m'\nmid(q-1)$.
- $(m',q)\neq 1$.
- $\mathfrak{X}\cap m'\mathbb{Z}=\varnothing$.

En outre, pour tout $(t,s)\in\mathcal{H}$, on a:

- $t\neq 0$.
- *Si de plus, $\mathfrak{X}$ contient un élément τ premier avec $[m,m']$ et $(m,q-1)=1$ (ou $(m,m')=1$), alors $s=0$.*

Preuve Soit $(t,s)\in\mathcal{H}$, il existe $\tau\in\mathfrak{X}$ et $n_0\in\mathbb{N}^*$ tels que

$$m'|q^{n_0}(q-1)t\tau,$$
$$m'\nmid q^{n_0-1}(q-1)t\tau.$$

D'où les quatre premiers points de la proposition.

Pour le dernier point, la preuve est identique à celle de la proposition 4.3. □

Proposition 4.8 *Si $1\in\mathcal{D}-\mathcal{D}$ et $\mathcal{H}\neq\varnothing$ alors $\mathfrak{X}$ contient 1.*

Preuve En conséquence de la proposition précédente, les éléments de $\mathcal{H}$ sont de la forme $(t,0)$ avec $t\in\{1,\dots,m'-1\}$. Il existe alors $\tau_0\in\mathcal{D}-\mathcal{D}$ tel que

$$tq^j\tau_0\not\equiv 0 \bmod m', \text{ pour un nombre fini non nul de } j\in\mathbb{N}. \tag{4.3}$$

∘ Si $\tau_0=1$ c'est terminé.
∘ Sinon $tq^j\not\equiv 0 \bmod m'$ pour un nombre fini, éventuellement nul, de $j\in\mathbb{N}$. Mais, ce nombre ne peut pas être nul car ceci contredirait (4.3). □

En conséquence des propositions 4.3, 4.7 et 4.8, il est aisé d'établir que

Proposition 4.9 *Soient q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $(m',q)=(m,q-1)=1$ et que $\mathcal{D}-\mathcal{D}$ contient un élément premier avec $[m,m']$, alors $\mathcal{T}=\{(0,0)\}$ et $\mathcal{H}=\varnothing$.*

La proposition précédente met en évidence la preuve du corollaire 2.2 à partir de l'évaluation des sommes d'exponentielles complexes.

Proposition 4.10 *Soient q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. Supposons que $\mathcal{H} \neq \emptyset$, on pose $n_0 := 1 + \min_{\substack{(t,s)\in\mathcal{H} \\ \tau\in\mathfrak{X}}} M(t, s, \tau)$ (M étant l'entier défini dans la preuve de la proposition 4.6). Alors, il existe des nombres entiers $q_1, \ldots, q_{n_0}$, α_{n_0}, m'_{n_0}, avec $(m'_{n_0}, q_{n_0}) = 1$ tels que*

$$m' = \alpha_{n_0}^{n_0} q_{n_0}^{n_0-1} \ldots q_2 m'_{n_0},$$
$$q = \alpha_{n_0} q_{n_0} \ldots q_1.$$

En particulier,

- ◦ *(m', q) est un multiple de $\alpha_{n_0} q_{n_0} \ldots q_2$.*
- ◦ *$n_0 \leq \omega(q)$, $n_0 - 1 \leq \omega(m')$, $n_0 \leq \Omega(q)$ et $1 + \frac{n_0(n_0-1)}{2} \leq \Omega(m')$.*

Preuve Il existe $(t_0, s_0) \in \mathcal{H}$, $\tau_0 \in \mathfrak{X}$ tels que

$$m' | q^{n_0}(q-1)t_0\tau_0,$$
$$m' \nmid q^{n_0-1}(q-1)t_0\tau_0.$$

Posons $\alpha_1 = (m', q) > 1$, il existe m'_1 et q_1 tels que $(m'_1, q_1) = 1$ et $m' = \alpha_1 m'_1$ et $q = \alpha_1 q_1$.

- Si $m'_1 = 1$, alors $m'|q$ de sorte que $n_0 = 1$.
- Si $q_1 = 1$, alors $q|m'$ de sorte que $n_0 = 1$.
- Si $m'_1 \neq 1$, $q_1 \neq 1$ et $n_0 = 1$, alors

$$m'_1 | q_1(q-1)t_0\tau_0,$$
$$m'_1\alpha_1 \nmid (q-1)t_0\tau_0,$$

  de sorte que $\alpha_1 \nmid \frac{(q-1)t_0\tau_0}{m'_1}$.
- Si $m'_1 \neq 1$, $q_1 \neq 1$ et $n_0 \geq 2$, alors on réitère le procédé jusqu'au rang n_0, ce qui permet d'obtenir trois suites d'entiers $m'_1, \ldots, m'_{n_0}$, $q_1, \ldots, q_{n_0}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_0}$ tels que $\alpha_{j+1} = (m'_j, \alpha_j)$, $m'_j = \alpha_{j+1} m'_{j+1}$, $\alpha_j = \alpha_{j+1} q_{j+1}$ et $(m'_{j+1}, q_{j+1}) = 1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n_0 - 1\}$. En particulier, $m'_1 > \ldots > m'_{n_0}$ et $\alpha_1 > \ldots > \alpha_{n_0}$.
  En remontant le calcul, il vient que

$$m' = \alpha_{n_0}^{n_0} q_{n_0}^{n_0-1} \ldots q_2 m'_{n_0},$$
$$q = \alpha_{n_0} q_{n_0} \ldots q_1.$$

Dans le cas où $m'_{n_0} \neq 1$ et $q_{n_0} \neq 1$, on tire l'identité $\alpha_{n_0} \nmid \frac{(q-1)t_0\tau_0}{m'_{n_0}}$. □

Proposition 4.11 *Soient q, m et m' des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. Si $\mathcal{H}' \neq \emptyset$, on considère $(t, s) \in \mathcal{H}'$. Il existe $\tau_0 \in \mathcal{D} - \mathcal{D}$ tel que $(q^j tm + sm')\tau_0 \not\equiv 0 \bmod mm'$, pour une infinité de $j \in \mathbb{N}$. On suppose que $(q^j tm + sm')\tau_0 \equiv 0 \bmod mm'$, pour une infinité de $j \in \mathbb{N}$ et on pose (a_j) la suite définie par $(q^j tm + sm')\tau_0 \equiv a_j \bmod mm'$, $\forall j \in \mathbb{N}$; (ici les a_j sont pris dans $\{0, \ldots, mm' - 1\}$). Alors, la suite (a_j) est périodique à partir d'un certain rang.*

Preuve La suite (a_j) étant à valeurs dans $\{0, \ldots, mm' - 1\}$, il existe h, $l \in \mathbb{N}$, $h < l$ tels que $a_h = a_l$. Soient $h_0 < l_0$ les plus petits indices vérifiant cette propriété. Posons $T = l_0 - h_0$, il est trivial que $T \leq mm'$ et clairement $T \geq 2$ car sinon on aura

$$q^{h_0}(q-1)tm\tau_0 \equiv 0 \bmod mm'$$

et donc $\forall j \geq h_0$

$$a_{j+1} - a_j \equiv q^j(q-1)tm\tau_0 \bmod mm' \equiv 0 \bmod mm',$$

de sorte que la suite (a_j) est stationnaire en contradiction avec les hypothèses.

En particulier,

$$q^{h_0}(q^T - 1)tm\tau_0 \equiv 0 \bmod mm'.$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, ..., T-1\}$, alors

$$a_{kT+h_0+r} - a_{h_0+r} \equiv q^{h_0+r}(q^{kT} - 1)tm\tau_0 \bmod mm' \equiv 0 \bmod mm'.$$

En conclusion, la suite (a_j) est périodique à partir du rang h_0. □

5 Exemples

- Considérons les paramètres $m = 2$, $m' = 4$, $q = 6$ et $\mathcal{D} = \{0, 1, 2\}$. Dans ce cas, $\mathcal{H} = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$.

En effet, pour chacun de ces couples (t, s) (et en remarquant que $\mathcal{D} - \mathcal{D} = \{1, 2\}$), il vient que:

◇ pour le couple $(1, 0)$, on vérifie

$$(tmq^j + sm')\tau_1 = 2 \times 6^j \equiv \begin{cases} 2 \bmod 8, & \text{si } j = 0, \\ 4 \bmod 8, & \text{si } j = 1, \\ 0 \bmod 8, & \text{si } j \geq 2, \end{cases}$$

$$(tmq^j + sm')\tau_2 = 4 \times 6^j \equiv \begin{cases} 4 \bmod 8, & \text{si } j = 0, \\ 0 \bmod 8, & \text{si } j \geq 1, \end{cases}$$

◇ pour le couple $(2, 0)$, on vérifie

$$(tmq^j + sm')\tau_1 = 4 \times 6^j \equiv \begin{cases} 4 \bmod 8, & \text{si } j = 0, \\ 0 \bmod 8, & \text{si } j \geq 1, \end{cases}$$

$$(tmq^j + sm')\tau_2 = 8 \times 6^j \equiv 0 \bmod 8, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

et

◇ pour le couple $(3, 0)$, on vérifie

$$(tmq^j + sm')\tau_1 = 6^{j+1} \equiv \begin{cases} 6 \bmod 8, & \text{si } j = 0, \\ 4 \bmod 8, & \text{si } j = 1, \\ 0 \bmod 8, & \text{si } j \geq 2, \end{cases}$$

$$(tmq^j + sm')\tau_2 = 2 \times 6^{j+1} \equiv \begin{cases} 2 \bmod 4, & \text{si } j = 0, \\ 0 \bmod 4, & \text{si } j \geq 1. \end{cases}$$

- On considère les paramètres $q = m = m' \geq 2$ et $\mathcal{D} = \{0, 1\}$. Clairement, $(1, m-1) \in \mathcal{H}'$. De plus, on est dans le cas où $(q^j tm + sm') \equiv 0 \bmod mm'$ pour un nombre fini de $j \in \mathbb{N}$, vu que dans ce cas

$$m + (m-1)m' \equiv 0 \bmod mm',$$
$$q^j m + (m-1)m' \not\equiv 0 \bmod mm', \ \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Ce cas se traite donc conformément aux inégalités (6.14) et (6.22).

- Considérons maintenant les paramètres $m = m' = 6$, $q = 8$ et $\mathcal{D} = \{0, 1\}$. Le couple $(1, 2)$ appartient à $\mathcal{H}'$ et on est dans le cas où $(q^j tm + sm') \not\equiv 0 \bmod mm'$, pour une infinité de $j \in \mathbb{N}$ et où $(q^j tm + sm') \equiv 0 \bmod mm'$ pour une infinité de $j \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite (a_j) définie dans la proposition 4.11 est périodique à partir du rang 1 vu que dans ce cas
$$(q^j tm + sm') \equiv \begin{cases} 18 \bmod mm', & si\ j = 0, \\ 24 \bmod mm', & si\ j \text{ est impair}, \\ 0 \bmod mm', & si\ j \text{ est pair supérieur ou égal à } 2. \end{cases}$$

Ce cas se traite conformément aux inégalités (6.17) et (6.23).

6 Preuve du théorème 2.1

On va maintenant entamer la preuve du théorème 2.1 en distinguant les cas $0 \notin \mathcal{D}$ et $0 \in \mathcal{D}$.

6.1 Si $0 \notin \mathcal{D}$

Soit N assez grand, on écrit $N = l_\nu q^\nu + ... + l_1 q + l_0$ avec $l_i \in \{0, ..., q-1\}$ pour tout $i \in \{0, ..., \nu\}$, puis on pose

$$E_1 := \frac{1}{mm'} \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} e\left(-\frac{ta}{m'} - \frac{sr}{m}\right) \Bigg[T_{l_\nu}\left(q^\nu \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \prod_{j=0}^{\nu-1} T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) + \sum_{k=0}^{\nu-1} \prod_{j=0}^{k} T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) + \sum_{k=1}^{\nu} \left(\prod_{j=k}^{\nu} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j) e\left(l_j \left(q^j \frac{t}{m'} + \frac{s}{m}\right)\right)\right) \times T_{l_{k-1}}\left(q^{k-1} \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \prod_{j=0}^{k-2} T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \Bigg],$$

$$E_2 := \frac{1}{mm'} \sum_{(t,s)\in\mathcal{H}} e\left(-\frac{ta}{m'} - \frac{sr}{m}\right) \Bigg[T_{l_\nu}\left(q^\nu \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \prod_{j=0}^{\nu-1} T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) + \sum_{k=0}^{\nu-1} \prod_{j=0}^{k} T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) + \sum_{k=1}^{\nu} \left(\prod_{j=k}^{\nu} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j) e\left(l_j \left(q^j \frac{t}{m'} + \frac{s}{m}\right)\right)\right) \times T_{l_{k-1}}\left(q^{k-1} \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \prod_{j=0}^{k-2} T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \Bigg]$$

et

$$E_3 := \frac{1}{mm'} \sum_{(t,s)\in\mathcal{H}'} e\left(-\frac{ta}{m'} - \frac{sr}{m}\right) \Bigg[T_{l_\nu}\left(q^\nu \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \prod_{j=0}^{\nu-1} T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) + \sum_{k=0}^{\nu-1} \prod_{j=0}^{k} T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) + \sum_{k=1}^{\nu} \left(\prod_{j=k}^{\nu} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j) e\left(l_j \left(q^j \frac{t}{m'} + \frac{s}{m}\right)\right)\right) \times T_{l_{k-1}}\left(q^{k-1} \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \prod_{j=0}^{k-2} T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \Bigg].$$

En conséquence des lemmes 3.1, 3.5 et de l'identité (4.2), on obtient:

$$\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N,a,m',r,m\right)\right| = E_1 + E_2 + E_3. \tag{6.1}$$

D'abord, comme pour chaque $(t,s) \in \mathcal{T}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour chaque $l \in \{0, ..., q\}$,

$$\sum_{d\in\mathcal{D}_l} e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right) = |\mathcal{D}_l| e\left(\delta\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right), \tag{6.2}$$

alors, on peut écrire

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{mm'}\sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} e\left(\delta\left((1+...+q^\nu)\frac{t}{m'}+(\nu+1)\frac{s}{m}\right)-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\\
&\quad\times\left[|\mathcal{D}_{l_\nu}||\mathcal{D}|^\nu+\sum_{k=1}^{\nu}|\mathcal{D}|^k+\sum_{k=1}^{\nu}\left(\prod_{j=k}^{\nu}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right)|\mathcal{D}_{l_{k-1}}||\mathcal{D}|^{k-1}\right]\\
&\quad+\frac{1}{mm'}\sum_{(t,s)\in\mathcal{T}}\sum_{k=1}^{\nu}|\mathcal{D}|^k\left[e\left(\delta\left((1+...+q^{k-1})\frac{t}{m'}+k\frac{s}{m}\right)-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\right.\\
&\quad\left.-e\left(\delta\left((1+...+q^{\nu})\frac{t}{m'}+(\nu+1)\frac{s}{m}\right)-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\right]\\
&= \frac{|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|}{mm'}\sum_{(t,s)\in\mathcal{T}}\cos\left(2\pi\left(\delta\left((1+...+q^\nu)\frac{t}{m'}+(\nu+1)\frac{s}{m}\right)-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\right)\\
&\quad+\frac{2}{mm'}\sigma_1(N,a,m',r,m).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

La dernière égalité découle immédiatement du lemme 3.4 et de l'identité

$$e^{i\varphi}-e^{i\psi}=2ie^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right);\quad \text{valable } \forall\varphi \text{ et } \psi\in\mathbb{R}.$$

Ensuite, on s'intéresse à E_2. D'après la proposition 4.6, pour tout $(t,s)\in\mathcal{H}$, il existe $\tau\in\mathfrak{X}$, il existe un rang $M=M(t,s,\tau)\in\mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases}(q^jtm+sm')\tau\not\equiv 0 \bmod mm', & \forall j\le M,\\ (q^jtm+sm')\tau\equiv 0 \bmod mm', & \forall j> M.\end{cases}$$

Posons $n_1 = 1 + \max\limits_{\substack{(t,s)\in\mathcal{H}\\ \tau\in\mathfrak{X}}} M(t,s,\tau)$, alors l'identité (6.2) permet de vérifier que pour tout $k\in\{0,\dots,\nu\}$, on a

$$T_{l_k}\left(q^k\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{d\in\mathcal{D}_{l_k}} e\left(d\left(q^k\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right), & \text{si } k<n_1,\\ |\mathcal{D}_{l_k}|e\left(\delta\left(q^k\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right), & \text{sinon },\end{cases}$$

et pour tout $j\in\{0,\dots,\nu\}$, on a

$$T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right), & \text{si } j<n_1,\\ |\mathcal{D}|e\left(\delta\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right), & \text{sinon },\end{cases}$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{k}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)=\sum_{k=n_1}^{\nu-1}|\mathcal{D}|^{k-n_1+1}e\left(\delta\left((q^{n_1}+...+q^k)\frac{t}{m'}+(k+1-n_1)\frac{s}{m}\right)\right)$$
$$\times\prod_{j=0}^{n_1-1}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}}e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right)+O(1),\tag{6.4}$$

pour tout $k\in\{n_1,\ldots,\nu\}$

$$T_{l_k}\left(q^k\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\prod_{j=0}^{k-1}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)=|\mathcal{D}_{l_k}||\mathcal{D}|^{k-n_1}\prod_{j=0}^{n_1-1}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}}e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right)$$
$$\times e\left(\delta\left((q^{n_1}+...+q^k)\frac{t}{m'}+(k+1-n_1)\frac{s}{m}\right)\right)\tag{6.5}$$

et pour tout $k\in\{n_1-1,\ldots,\nu-1\}$

$$\prod_{j=k+1}^{\nu}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)e\left(l_j\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)=e\left(\delta\left((q^{k+1}+\ldots+q^{\nu})\frac{t}{m'}+(\nu-k)\frac{s}{m}\right)\right)$$
$$\times\prod_{j=k+1}^{\nu}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j).\tag{6.6}$$

Les identités (6.4), (6.5) et (6.6) permettent d'écrire successivement

$$\begin{aligned}\sigma_2(N,a,m',r,m)=&\sum_{(t,s)\in\mathcal{H}}e\left(-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\Bigg[T_{l_\nu}\left(q^\nu\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\prod_{j=0}^{\nu-1}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\\&+\sum_{k=n_1}^{\nu-1}\left(\prod_{j=k+1}^{\nu}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)e\left(l_j\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right)\\&\times T_{l_k}\left(q^k\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\prod_{j=0}^{k-1}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\Bigg]\\=&\sum_{(t,s)\in\mathcal{H}}e\left(\delta\left((q^{n_1}+...+q^\nu)\frac{t}{m'}+(\nu+1-n_1)\frac{s}{m}\right)-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\\&\times\left(|\mathcal{D}_{l_\nu}||\mathcal{D}|^{\nu-n_1}+\sum_{k=n_1}^{\nu-1}|\mathcal{D}_{l_k}||\mathcal{D}|^{k-n_1}\prod_{j=k+1}^{\nu}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right)\\&\times\prod_{j=0}^{n_1-1}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}}e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right),\end{aligned}\tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}\sigma_3(N,a,m',r,m) &= \sum_{(t,s)\in\mathcal{H}} e\left(-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\sum_{k=n_1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{k} T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\\ &= \sum_{(t,s)\in\mathcal{H}}\left[\prod_{j=0}^{n_1-1}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{b}+\frac{s}{d}\right)\right)\right)\right.\\ &\quad\times\sum_{k=n_1}^{\nu-1}|\mathcal{D}|^{k-n_1+1} e\left(\delta\left((q^{n_1}+\ldots+q^k)\frac{t}{b}+(k+1-n_1)\frac{s}{d}\right)\right.\\ &\quad\left.\left.-\frac{ta}{b}-\frac{sc}{d}\right)\right].\end{aligned} \tag{6.8}$$

En regroupant (6.7) et (6.8), il vient que

$$E_2 = \frac{1}{mm'}\left[\sigma_2(N,a,m',r,m)+\sigma_3(N,a,m',r,m)\right]+O(1). \tag{6.9}$$

Enfin, on détermine une majoration de E_3.

Notons que si $\mathcal{H}'=\varnothing$ alors $\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N,a,m',r,m\right)\right| = E_1$ ou E_1+E_2 (suivant que $\mathcal{H}$ est vide ou non) et le choix de n'importe quel $\lambda<1$ permet de conclure.

Dans le cas contraire, soit $(t,s)\in\mathcal{H}'$, alors il existe d_0 et $d_0'\in\mathcal{D}$ tels que $(q^jtm+sm')(d_0-d_0')\not\equiv 0 \bmod mm'$ pour une infinité de $j\in\mathbb{N}$. Il vient alors que pour une infinité de $j\in\mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right| < \sum_{d\in\mathcal{D}}\left|e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right| = |\mathcal{D}|. \tag{6.10}$$

En fait, l'inégalité est stricte en vertu du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Posons

$$\mathcal{J} := \{j\in\mathbb{N}\,:\,(q^jtm+sm')(d_0-d_0')\not\equiv 0 \bmod mm'\} \tag{6.11}$$

et $\eta := \sup_{j\in\mathcal{J},\ (t,s)\in\mathcal{H}'}\left|\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right|$.

Comme les entiers q^j décrivent un nombre fini de valeurs $\{q,q^2,\ldots,q^\mu\} \bmod m'$ lorsque j décrit $\mathcal{J}$ et d'après (6.10), on obtient:

$$\eta = \max_{1\le j\le\mu,\ (t,s)\in\mathcal{H}'}\left|\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right| < |\mathcal{D}|. \tag{6.12}$$

On pose maintenant

$$\rho := \begin{cases}\eta, & \text{si } \eta\notin\{0,1\},\\ \frac{3}{2}, & \text{sinon}\end{cases} \tag{6.13}$$

et on discute suivant deux cas:

- Si $(q^jtm+sm')(d_0-d_0')\equiv 0 \bmod mm'$ pour un nombre fini (éventuellement nul) de $j\in\mathbb{N}$, disons pour $\theta=\theta(t,s)$ valeurs de j, on pose $\theta' := \max_{(t,s)\in\mathcal{H}'}(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned}|E_3| &\le q+(q+1)|\mathcal{D}|^{\theta'}\sum_{k=1}^{\nu}\rho^k\\ &\ll_q \rho^\nu.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Ainsi, le choix de

$$\lambda = \sigma := \frac{\ln\ \rho}{\ln |\mathcal{D}|} < 1 \tag{6.15}$$

prouve que $E_3 = O_{q,m,m'}\left(N^{\sigma \frac{\ln |\mathcal{D}|}{\ln q}}\right)$.

- Si $(q^j tm + sm')(d_0 - d_0') \equiv 0 \bmod mm'$ pour une infinité de $j \in \mathbb{N}$, alors en gardant les notations précédentes, il vient que

$$|E_3| \leq q + (q+1) \sum_{k=0}^{\nu-1} \prod_{j=0}^{k} \left| T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right)\right|.$$

On pose σ la quantité définie dans (6.15) et on sépare cette somme en deux quantités suivant l'entier h_0 défini dans la preuve de la proposition 4.11

$$\sum_{k=0}^{h_0-1} \prod_{j=0}^{k} \left| T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right)\right| \leq \frac{q^{mm'}}{2^\sigma - 1}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=h_0}^{\nu-1} \prod_{j=0}^{k} \left| T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right)\right| &\leq \sum_{k=h_0}^{\nu-1} |\mathcal{D}|^{\left\lfloor \frac{k-h_0}{T} \right\rfloor + 1} \rho^{k+1-\left\lfloor \frac{k-h_0}{T} \right\rfloor} \\ &\leq q^{\sigma+1} \frac{|\mathcal{D}|^{\lambda\nu}}{2^\lambda - 1},\end{aligned}$$

où

$$\lambda := \sigma + \frac{1-\sigma}{T} < 1. \tag{6.16}$$

Ceci implique

$$|E_3| \leq q + (q+1)\left[\frac{q^{mm'}}{2^\sigma - 1} + q^{\sigma+1}\frac{|\mathcal{D}|^{\lambda\nu}}{2^\lambda - 1}\right] \tag{6.17}$$

et par conséquent $E_3 = O_{q,m,m'}\left(N^{\lambda \frac{\ln |\mathcal{D}|}{\ln q}}\right)$.

En conclusion, les relations (6.1), (6.3), (6.9), (6.14) et (6.17) permettent d'établir la formule cherchée. □

6.2 Si $0 \in \mathcal{D}$

Soit N assez grand, on écrit $N = l_1 q^{\nu_1} + \ldots + l_L q^{\nu_L}$ avec $\nu_1 > \ldots > \nu_L$ et $l_i \in \{1, \ldots, q-1\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, L\}$, puis on pose

$$\begin{aligned}E_1 := \frac{1}{mm'} \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} e\left(-\frac{ta}{m'} - \frac{sr}{m}\right) &\left[T_{l_1}\left(q^{\nu_1}\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \prod_{j=0}^{\nu_1-1} T_q\left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{L-1} \prod_{j=1}^{k} \left(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j) e\left(l_j\left(q^{\nu_j}\frac{t}{m'} + \frac{s}{m}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\times T_{l_{k+1}}\left(q^{\nu_{k+1}}\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\prod_{j=0}^{\nu_{k+1}-1}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\Bigg],$$

$$E_2 := \frac{1}{mm'}\sum_{(t,s)\in\mathcal{H}} e\left(-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\Bigg[T_{l_1}\left(q^{\nu_1}\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\prod_{j=0}^{\nu_1-1}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{L-1}\prod_{j=1}^{k}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)e\left(l_j\left(q^{\nu_j}\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right)$$
$$\times T_{l_{k+1}}\left(q^{\nu_{k+1}}\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\prod_{j=0}^{\nu_{k+1}-1}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\Bigg]$$

et

$$E_3 := \frac{1}{mm'}\sum_{(t,s)\in\mathcal{H}'} e\left(-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\Bigg[T_{l_1}\left(q^{\nu_1}\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\prod_{j=0}^{\nu_1-1}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{L-1}\prod_{j=1}^{k}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)e\left(l_j\left(q^{\nu_j}\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right)$$
$$\times T_{l_{k+1}}\left(q^{\nu_{k+1}}\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\prod_{j=0}^{\nu_{k+1}-1}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\Bigg].$$

Clairement, grâce aux lemmes 3.1 et 3.3 et à l'identité (4.2), on peut écrire:

$$\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N,a,m',r,m\right)\right| = E_1+E_2+E_3. \tag{6.18}$$

D'abord, puisque pour chaque $(t,s)\in\mathcal{T}$ et pour chaque entier $l\in\{1,\ldots,q-1\}$,

$$\sum_{d\in\mathcal{D}_l} e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right) = |\mathcal{D}_l|, \tag{6.19}$$

alors on s'intéresse à la somme

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{mm'}\sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} e\left(-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\left[|\mathcal{D}_{l_1}||\mathcal{D}|^{\nu_1}+\sum_{k=1}^{L-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right)|\mathcal{D}_{l_{k+1}}||\mathcal{D}|^{\nu_{k+1}}\right] \\ &= \frac{|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|}{mm'}\sum_{(t,s)\in\mathcal{T}}\cos\left(2\pi\left(\frac{ta}{m'}+\frac{sr}{m}\right)\right). \end{aligned} \tag{6.20}$$

La dernière égalité découle évidemment du lemme 3.2.

Quant à E_2, la proposition 4.6 permet d'affirmer que pour tout $(t,s)\in\mathcal{H}$, il existe $\tau\in\mathfrak{X}$, il existe un rang $M=M(t,s,\tau)\in\mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} (q^j tm+sm')\tau \not\equiv 0 \bmod mm', & \forall j\le M, \\ (q^j tm+sm')\tau \equiv 0 \bmod mm', & \forall j> M. \end{cases}$$

On pose $n_1 = 1 + \max_{\substack{(t,s)\in\mathcal{H}\\ \tau\in\mathfrak{X}}} M(t,s,\tau)$, il existe alors $k_0 \in \{2, ..., L\}$ tel que $\nu_{k_0} > n_1 \geq \nu_{k_0+1}$. Ainsi, les identités

$$T_{l_k}\left(q^{\nu_k}\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) = \begin{cases} \sum\limits_{d\in\mathcal{D}_{l_k}} e\left(d\left(q^{\nu_k}\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right), & \text{si } k > k_0,\\ |\mathcal{D}_{l_k}|, & \text{sinon,}\end{cases}$$

et

$$T_q\left(q^j\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) = \begin{cases} \sum\limits_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right), & \text{si } j < n_1,\\ |\mathcal{D}|, & \text{sinon,}\end{cases}$$

valables pour tout $k \in \{1, \ldots, L\}$ et pour tout $j \in \{0, \ldots, \nu_1 - 1\}$, permettent d'écrire

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{mm'}\sum_{(t,s)\in\mathcal{H}} e\left(-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\Bigg[T_{l_1}\left(q^{\nu_1}\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\prod_{j=0}^{\nu_1-1}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\\ &\quad+\sum_{k=1}^{L-1}\prod_{j=1}^{k}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)e\left(l_j\left(q^{\nu_j}\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right)T_{l_{k+1}}\left(q^{\nu_{k+1}}\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\prod_{j=0}^{\nu_{k+1}-1}T_q\left(q^j\frac{t}{m'},\frac{s}{m}\right)\Bigg]\\ &= \frac{1}{mm'}\sum_{(t,s)\in\mathcal{H}} e\left(-\frac{ta}{m'}-\frac{sr}{m}\right)\left(|\mathcal{D}_{l_1}||\mathcal{D}|^{\nu_1-n_1}+\sum_{k=1}^{k_0-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right)|\mathcal{D}_{l_{k+1}}||\mathcal{D}|^{\nu_{k+1}-n_1}\right)\\ &\quad\times\prod_{j=0}^{n_1-1}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}}e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right)+O(1). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Ensuite, on cherche à estimer la somme E_3. Il est à signaler que si $\mathcal{H}' = \varnothing$ alors $\left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N, a, m', r, m\right)\right|$ se réduit à E_1 ou $E_1 + E_2$ (suivant que $\mathcal{H}$ est vide ou non) et n'importe quel réel $\lambda < 1$ permet d'atteindre la conclusion souhaitée.

Dans le cas contraire, on se donne $(t, s) \in \mathcal{H}'$, donc il existe d_0 et $d_0' \in \mathcal{D}$ tels que $(q^j tm + sm')(d_0 - d_0') \not\equiv 0 \bmod mm'$ pour une infinité de $j \in \mathbb{N}$. Il s'en suit que pour une infinité de $j \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{d\in\mathcal{D}} e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right| < \sum_{d\in\mathcal{D}}\left|e\left(d\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)\right| = |\mathcal{D}|.$$

Posons η et ρ définis respectivement dans (6.12) et (6.13), puis discutons suivant deux cas:

- Si $(q^j tm + sm')(d_0 - d_0') \equiv 0 \bmod mm'$ pour un nombre fini (éventuellement nul) de $j \in \mathbb{N}$, disons pour $\theta = \theta(t, s)$ valeurs de j, on pose $\theta' := \max_{(t,s)\in\mathcal{H}'}(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned} |E_3| &\leq q|\mathcal{D}|^{\theta'}\sum_{k=1}^{L}\rho^{\nu_k}\\ &\ll_q \rho^{\nu_1}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

  Ainsi, le choix de λ défini dans l'identité (6.15) prouve que $E_3 = O_{q,m,m'}\left(N^{\lambda\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}\right)$.

- Si $(q^j tm + sm')(d_0 - d_0') \equiv 0 \bmod mm'$ pour une infinité de $j \in \mathbb{N}$, alors en gardant les notations précédentes, il vient que

$$|E_3| \leq q \sum_{k=0}^{\nu_1} \prod_{j=0}^{k-1} \left| T_q \left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m} \right) \right|.$$

On pose σ la constante définie dans (6.15) et on sépare cette somme en deux quantités suivant l'entier h_0 défini dans la preuve de la proposition 4.11, à savoir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{h_0-1} \prod_{j=0}^{k-1} \left| T_q \left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m} \right) \right| &\leq |\mathcal{D}| \sum_{k=0}^{h_0-1} \rho^k \\ &\leq \frac{q^{mm'}}{2^\sigma - 1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=h_0}^{\nu_1} \prod_{j=0}^{k-1} \left| T_q \left(q^j \frac{t}{m'}, \frac{s}{m} \right) \right| &\leq \sum_{k=h_0}^{\nu_1} |\mathcal{D}|^{\left\lfloor \frac{k-h_0}{T} \right\rfloor + 1} \rho^{k - \left\lfloor \frac{k-h_0}{T} \right\rfloor} \\ &\leq q^{\lambda+1} \frac{|\mathcal{D}|^{\lambda \nu_1}}{2^\lambda - 1}, \end{aligned}$$

où λ est la constante définie dans (6.16), ce qui implique

$$|E_3| \leq \frac{q^{mm'+1}}{2^\sigma - 1} + q^{\lambda+2} \frac{|\mathcal{D}|^{\lambda \nu_1}}{2^\lambda - 1} \tag{6.23}$$

et par conséquent $E_3 = O_{q,m,m'} \left(N^{\lambda \frac{\ln |\mathcal{D}|}{\ln q}} \right)$.

En conclusion, les relations (6.18), (6.20), (6.21), (6.22) et (6.23) permettent d'établir la formule cherchée. □

Remarque 6.1 il semblerait à première vue que la condition $\forall \tau \in \mathcal{D} - \mathcal{D} \setminus \{\tau_0\}$, $(q^j tm + sm')\tau \not\equiv 0 \bmod mm'$, **pour un nombre fini (éventuellement nul) de** $j \in \mathbb{N}$, exigée dans la définition de l'ensemble $\mathcal{H}$, soit lourde (voire superflue) mais en fait elle permet de séparer les éléments de $\mathcal{H}$ (qui devraient figurer dans la partie principale du théorème 2.1) et ceux de $\mathcal{H}'$ (qui seraient dans le terme d'erreur $O\left(N^{\lambda \frac{\ln |\mathcal{D}|}{\ln q}} \right)$). □

Preuve du corollaire 2.4 Dans le cas où $\mathcal{D} = \{0, ..., q-1\}$, la proposition 4.3 permet d'affirmer que $\mathcal{T}$ se réduit à $\{(0, 0)\}$. De plus, la proposition 4.7 justifie que les éléments de $\mathcal{H}$ (s'il est non vide) sont de la forme $(t, 0)$ où $t \in \{1, \ldots, m'-1\}$. Soit $(t_0, 0)$ un tel élément, la proposition 4.8 justifie l'existence d'un certain entier M tel que

$$\begin{cases} q^j t_0 \not\equiv 0 \bmod m', & \forall j \leq M, \\ q^j t_0 \equiv 0 \bmod m', & \forall j > M, \end{cases}$$

de sorte que

$$\sum_{d=0}^{q-1} e\left(dq^M \frac{t_0}{m'} \right) = 0.$$

En s'inspirant de l'identité (6.21), il existe $k_0 \in \{2, ..., L\}$ tel que $\nu_{k_0} > M + 1 \geq \nu_{k_0+1}$. Il vient alors que

$$e\left(-\frac{t_0 a}{m'} \right) \left[T_{l_1} \left(q^{\nu_1} \frac{t_0}{m'}, 0 \right) \prod_{j=0}^{\nu_1 - 1} T_q \left(q^j \frac{t_0}{m'}, 0 \right) \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{L-1}\prod_{j=1}^{k}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)e\left(l_jq^{\nu_j}\frac{t_0}{m'}\right)\right)T_{l_{k+1}}\left(q^{\nu_{k+1}}\frac{t_0}{m'},0\right)\prod_{j=0}^{\nu_{k+1}-1}T_q\left(q^j\frac{t_0}{m'},0\right)\Bigg]$$

$$= e\left(-\frac{t_0a}{m'}\right)\left(|\mathcal{D}_{l_1}||\mathcal{D}|^{\nu_1-M-1}+\sum_{k=1}^{k_0-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j)\right)|\mathcal{D}_{l_{k+1}}||\mathcal{D}|^{\nu_{k+1}-M-1}\right)$$

$$\times\prod_{j=0}^{M}\left(\sum_{d=0}^{q-1}e\left(dq^j\frac{t_0}{m'}\right)\right)+O(1)$$

$$= O(1).$$

Par conséquent, on retrouve le théorème **A** attribué à Gelfond. □

Remarque 6.2 Il est trivial de comparer la constante λ, que l'on vient de définir dans le théorème 2.1, à celle obtenue par le théorème **A** de Gelfond. En fait, lorsque $\mathcal{D}=\{0,1,\ldots,q-1\}$, l'identité (6.12) implique

$$\eta=\max_{j\in\mathcal{J},\ (t,s)\in\mathcal{H}'}\left|\frac{\sin\left(\pi q\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)}{\sin\left(\pi\left(q^j\frac{t}{m'}+\frac{s}{m}\right)\right)}\right|,$$

et cette expression peut être majorée en vertu des identités (6), (7) et (9) de [14] par q^{λ_0}, de sorte que, si $\eta\notin\{0,1\}$, alors

$$\lambda=\begin{cases}\lambda_0 & \text{si } (q^jtm+sm')(d_0-d_0')\equiv 0 \bmod mm' \\ & \text{pour un nombre fini de } j\in\mathbb{N}, \\ \frac{1}{T}+\lambda_0\left(1-\frac{1}{T}\right) & \text{si } (q^jtm+sm')(d_0-d_0')\equiv 0 \bmod mm' \\ & \text{pour une infinité de } j\in\mathbb{N}.\end{cases}\tag{6.24}$$

Malheureusement, cette expression ne constitue pas en général une amélioration de la constante de Gelfond tant qu'on ne peut pas repérer tous les éléments de $\mathcal{H}'$. Cependant, on peut trouver certains cas où notre constante améliore celle de Gelfond. Reprenons à titre d'exemple le cas $m=2$, $m'=4$ et $q=6$, alors $\mathcal{H}'=\{(0,1),(1,1),(2,1),(3,1)\}$ et on est dans le premier cas de l'identité (6.24) ce qui donne après le calcul $\lambda=\frac{\ln 2}{2\ln 6}\approx 0.1934$ tandis que celle obtenue par Gelfond vaut $\lambda_0=\frac{1}{2\ln 6}\ln\frac{3\sqrt{2}}{\sin(\frac{\pi}{24})}\approx 0.9714$. □

7 Preuve des théorèmes 2.5 et 2.6

D'abord, on a

$$\left|\mathcal{M}_{\mathcal{D},1}(N,r,m)\right|=\sum_{\substack{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)\\ S(n)\equiv r \bmod m}}\sum_{d^z|n}\mu(d).$$

Donc, en posant $N_1=\left\lfloor N^{\frac{1}{z}}\right\rfloor$, on peut écrire pour un certain $N_2\le N_1$

$$\left|\mathcal{M}_{\mathcal{D},1}(N,r,m)\right|=\sum_{1\le d\le N_1}\mu(d)\sum_{\substack{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)\\ S(n)\equiv r \bmod m\\ d^z|n}}1$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1\le d\le N_2} \mu(d) \sum_{\substack{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)\\ S(n)\equiv r \bmod m\\ d^z|n}} 1 + \sum_{N_2+1\le d\le N_1} \mu(d) \sum_{\substack{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)\\ S(n)\equiv r \bmod m\\ d^z|n}} 1\\
&= R_1 + R_2.
\end{aligned}
$$

Puis,

$$
\begin{aligned}
|R_2| &\le \sum_{d=N_2+1}^{N_1} \frac{N}{d^z}\\
&\le N\int_{N_2}^{N_1} \frac{1}{t^z} dt\\
&= \frac{N}{z-1} N_2^{1-z}. \qquad (7.1)
\end{aligned}
$$

7.1 Si $0 \notin \mathcal{D}$

Via le théorème 2.1, où on substitue m' par d^z et a par 0, on obtient les égalités

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \sum_{d=1}^{N_2} \mu(d) \sum_{\substack{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)\\ n\equiv 0 \bmod d^z\\ S(n)\equiv r \bmod m}} 1\\
&= \sum_{d=1}^{N_2} \mu(d) \left\{ \frac{|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|}{md^z} \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} \cos\left(2\pi\left(\delta\left((1+\ldots+q^\nu)\frac{t}{d^z} + (\nu+1)\frac{s}{m}\right) - r\frac{s}{m}\right)\right)\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{md^z}\,\mathfrak{S}(N,0,d^z,r,m) + O\left(N^{\lambda\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{m\zeta(z)} \left\{ |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \sum_{(t,s)\in\mathcal{T}} \cos\left(2\pi\left(\delta\left((1+\ldots+q^\nu)\frac{t}{d^z} + (\nu+1)\frac{s}{m}\right) - r\frac{s}{m}\right)\right)\right.\\
&\quad \left. + \mathfrak{S}(N,0,d^z,r,m)\right\} + O\left(\frac{N}{N_2^{z-1}}\right) + O\left(N_2 N^{\lambda\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}\right). \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

Le premier O résulte de la relation

$$
\sum_{d=1}^{N_2} \frac{\mu(d)}{d^z} = \frac{1}{\zeta(z)} - \sum_{d=N_2+1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^z},
$$

et de la majoration effectuée dans l'identité (7.1) valable tant que la série et l'intégrale sont toutes les deux convergentes. Enfin, on rassemble les estimations (7.1) et (7.2) et on pose $N_2 = \left\lfloor N^{\frac{1-\lambda\frac{\ln|\mathcal{D}|}{\ln q}}{z}} \right\rfloor$, le théorème 2.5 s'en suit immédiatement.

7.2 <u>Si</u> <u>$0 \in \mathcal{D}$</u>

On utilise le corollaire 2.3, en substituant m' par d^z et a par 0, on obtient les égalités

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sum_{d=1}^{N_2} \mu(d) \sum_{\substack{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N) \\ n \equiv 0 \bmod d^z \\ S(n) \equiv r \bmod m}} 1 \\
&= \sum_{d=1}^{N_2} \mu(d) \Bigg\{ \frac{|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|}{m d^z} \sum_{(t,s) \in \mathcal{T}} \cos\left(2\pi \frac{sr}{m}\right) + \frac{1}{m d^z} \sum_{(t,s) \in \mathcal{H}} e\left(-\frac{sr}{m}\right) \\
&\quad \times \Bigg[\left(|\mathcal{D}_{l_1}| |\mathcal{D}|^{\nu_1 - n_1} + \sum_{k=1}^{k_0 - 1} \left(\prod_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j) \right) |\mathcal{D}_{l_{k+1}}| |\mathcal{D}|^{\nu_{k+1} - n_1} \right) \\
&\quad \times \prod_{j=0}^{n_1 - 1} \left(\sum_{d \in \mathcal{D}} e\left(d \left(q^j \frac{t}{d^z} + \frac{s}{m} \right) \right) \right) \Bigg] + O\left(N^{\lambda \frac{\ln |\mathcal{D}|}{\ln q}} \right) \Bigg\} \\
&= \frac{1}{m \zeta(z)} \Bigg\{ |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \sum_{(t,s) \in \mathcal{T}} \cos\left(2\pi \frac{sr}{m}\right) + \sum_{(t,s) \in \mathcal{H}} e\left(-\frac{sr}{m}\right) \\
&\quad \times \left(|\mathcal{D}_{l_1}| |\mathcal{D}|^{\nu_1 - n_1} + \sum_{k=1}^{k_0 - 1} \left(\prod_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(l_j) \right) |\mathcal{D}_{l_{k+1}}| |\mathcal{D}|^{\nu_{k+1} - n_1} \right) \\
&\quad \times \prod_{j=0}^{n_1 - 1} \left(\sum_{d \in \mathcal{D}} e\left(d \left(q^j \frac{t}{d^z} + \frac{s}{m} \right) \right) \right) \Bigg\} + O\left(\frac{N}{N_2^{z-1}} \right) + O\left(N_2 N^{\lambda \frac{\ln |\mathcal{D}|}{\ln q}} \right). \quad (7.3)
\end{aligned}$$

Enfin, on rassemble les estimations (7.1) et (7.3) et on pose $N_2 = \left\lfloor N^{\frac{1 - \lambda \frac{\ln |\mathcal{D}|}{\ln q}}{z}} \right\rfloor$ comme précédemment pour aboutir au théorème 2.6. □

Preuve des corollaires 2.7 et 2.8 Il suffit de remarquer que:

$$\left| \mathcal{M}_{\mathcal{D},\gamma}(N, r, m) \right| = \sum_{\substack{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N) \\ S(n) \equiv r \bmod m}} \sum_{d_0^z | n} \sum_{d_1^z | (n+1)} \cdots \sum_{d_{\gamma-1}^z | (n+\gamma-1)} \mu(d_0) \ldots \mu(d_{\gamma-1}).$$

En effectuant les mêmes transformations que dans les théorèmes 2.5 et 2.6, on obtient les formules correspondantes aux corollaires 2.7 et 2.8. □

8 Preuve du théorème 2.9

On commence par l'introduction de quelques notations et quelques lemmes utilisés dans [10] qui seront utiles pour établir le théorème 2.9.

D'abord, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_{|\mathcal{D}|}\}$, on écrit

$$u(\alpha) = u_{\mathcal{D}}(\alpha) := \sum_{k=1}^{|\mathcal{D}|} e(d_k \alpha)$$

et

$$\mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{U}_{\mathcal{D}}(\alpha) := \frac{u_{\mathcal{D}}(\alpha)}{|\mathcal{D}|}.$$

Ensuite, on utilise une version améliorée du lemme 2 dans [10].

Lemme 8.1 *Si q et $\mathcal{D}$ sont tels que définis au théorème 2.9, $\alpha \in \mathbb{R}$ alors on a*

$$|\mathcal{U}(\alpha)| \leq 1 - \frac{64}{(q+1)^3} \|\alpha\|^2.$$

Preuve C'est le corollaire 1 de [4]. □

Lemme 8.2 *Si $q,\ m',\ t,\ \rho \in \mathbb{N}^*$ vérifient $q \geq 2$, $m' \geq 2$, $1 \leq t \leq m'-1$, $(q, m') = 1$ et $(q-1)\dfrac{t}{m'} \notin \mathbb{Z}$,*

$$\rho \geq 2\frac{\ln m'}{\ln q} + 8 \tag{8.1}$$

et $\beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\sum_{j=0}^{\rho-1} \left\| \beta + q^j \frac{t}{m'} \right\| \geq \frac{(q-1)^2}{20q^4} \frac{\rho}{\ln m'}.$$

Preuve Il s'agit du lemme 2' de [20], qui constitue lui même une légère amélioration du lemme 2 de [21]. □

Preuve du théorème 2.9 On revient à la fonction génératrice

$$T_N(\alpha, \beta) = \sum_{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} e(n\alpha + S(n)\beta),$$

en particulier

$$T_N(0,0) = |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|, \tag{8.2}$$

ainsi pour $(a, r) \in \mathbb{Z}^2$, m' et $m \in \mathbb{N}^*$ on a d'après le lemme 3.1

$$|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N, a, m', r, m)| = \frac{1}{mm'} \sum_{t=0}^{m'-1} e\left(-\frac{ta}{m'}\right) \sum_{s=0}^{m-1} e\left(-\frac{rs}{m}\right) T_N\left(\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right). \tag{8.3}$$

Il découle de (8.2) et (8.3) que

$$\begin{aligned} &\left| \left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N, a, m', r, m\right)\right| - \frac{1}{mm'} |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \right| \\ &= \left| \left|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\left(N, a, m', r, m\right)\right| - \frac{1}{mm'} T_N(0,0) \right| \\ &\leq \frac{1}{mm'} \left(\sum_{s=1}^{m-1} \left| T_N\left(0, \frac{s}{m}\right) \right| + \sum_{(t,s) \in \Upsilon} \left| T_N\left(\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right) \right| \right), \end{aligned} \tag{8.4}$$

où

$$\Upsilon := \{1, ..., m'-1\} \times \{0, ..., m-1\}.$$

On est ainsi ramené à estimer $\left|T_N\left(0, \frac{s}{m}\right)\right|$ pour

$$s \in \{1, ..., m-1\} \tag{8.5}$$

et $\left|T_N\left(\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right)\right|$ pour

$$(t, s) \in \Upsilon. \tag{8.6}$$

D'une part, d'après [10], on écrit N sous la forme

$N = \sum_{k=1}^{u} b_k q^{\nu_k}$, où $\nu_1 > \nu_2 > ... > \nu_u$, $b_k \in \{1, 2, ..., q-1\}$ pour $k \in \{1, 2, ..., u\}$

de sorte que $q^{\nu_1} \leq N < q^{\nu_1+1}$ et donc $\nu_1 = \left\lfloor \frac{\ln N}{\ln q} \right\rfloor$.

En outre, pour $s \in \{1, ..., m-1\}$, on peut majorer en vue du lemme 3.3

$$\begin{aligned}\left|T_N\left(0, \frac{s}{m}\right)\right| &\leq \sum_{k=1}^{u} \left|T_{b_k q^{\nu_k}}\left(0, \frac{s}{m}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{u} \left|T_{b_k}\left(0, \frac{s}{m}\right)\right| \left|T_{q^{\nu_k}}\left(0, \frac{s}{m}\right)\right| \\ &\leq (q-1) \sum_{k=0}^{\nu_1} \prod_{j=0}^{k-1} \left|\sum_{d \in \mathcal{D}} e\left(d\frac{s}{m}\right)\right|. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Mais, comme on a supposé dans le théorème 2.9 que pour tout $s \in \{1, ..., m-1\}$,$m \nmid sd_2$, on en déduit

$$\left|\sum_{d \in \mathcal{D}} e\left(d\frac{s}{m}\right)\right| < |\mathcal{D}|.$$

Ainsi, quitte à poser

$$\gamma := \max_{1 \leq s \leq m-1} \left|\sum_{d \in \mathcal{D}} e\left(d\frac{s}{m}\right)\right|$$

(que l'on suppose positif strict) et

$$\omega := \frac{\ln \gamma}{\ln |\mathcal{D}|} < 1,$$

il vient que $\forall s \in \{1, ..., m-1\}$

$$\left|\sum_{d \in \mathcal{D}} e\left(d\frac{s}{m}\right)\right| \leq |\mathcal{D}|^{\omega},$$

ce qui donne en reportant dans l'inégalité (8.7)

$$\begin{aligned}\left|T_N\left(0, \frac{s}{m}\right)\right| &\leq (q-1) \sum_{k=0}^{\nu_1} |\mathcal{D}|^{k\omega} \\ &\leq (q-1) \frac{|\mathcal{D}|^{\omega\nu_1} - 1}{|\mathcal{D}| - 1} \\ &\leq |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|^{\omega}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Signalons enfin que si $\gamma = 0$, alors $\left|T_N\left(0, \frac{s}{m}\right)\right| = 0$ et l'inégalité (8.8) est satisfaite pour n'importe quel $\omega < 1$.

D'autre part, pour $l \in \{1, 2, ..., u\}$, on désigne par $\mathcal{A}_l$ l'ensemble des entiers n qui s'écrivent sous la forme

$$n = \sum_{i=1}^{l-1} b_i q^{\nu_i} + x q^{\nu_l} + \sum_{j=0}^{\nu_l - 1} y_j q^j,$$

où

$$x \in \mathcal{D} \cap \{0, 1, ..., b_l - 1\}, \ \ y_j \in \mathcal{D} \text{ pour } j \in \{0, 1, ..., \nu_l - 1\}.$$

Ainsi, on a clairement

$$\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N) = \bigcup_{l=1}^{u} \mathcal{A}_l,$$

avec

$$\mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_l = \varnothing \text{ pour } 1 \leq j < l \leq u.$$

Il vient donc que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} T_N(\alpha, \beta) &= \sum_{n \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} e(n\alpha + S(n)\beta) \\ &= \sum_{l=1}^{u} \sum_{n \in \mathcal{A}_l} e(n\alpha + S(n)\beta) = \sum_{l=1}^{u} T_{N,l}(\alpha, \beta), \end{aligned} \tag{8.9}$$

avec, pour $l \in \{1, ..., u\}$,

$$\begin{aligned} T_{N,l}(\alpha, \beta) &= \sum_{x} \sum_{y_0} \cdots \sum_{y_{\nu_l - 1}} e\Big(\big(b_1 q^{\nu_1} + ... + b_{l-1} q^{\nu_{l-1}} + x q^{\nu_l} + y_0 q^0 + ... \\ &\quad + y_{\nu_l - 1} q^{\nu_l - 1}\big)\alpha + \big(b_1 + ... + b_{l-1} + x + y_0 + ... + y_{\nu_l - 1}\big)\beta\Big) \\ &= e\left(\left(b_1 q^{\nu_1} + ... + b_{l-1} q^{\nu_{l-1}}\right)\alpha + (b_1 + ... + b_{l-1})\beta\right) \\ &\quad \times \left(\sum_{x \in \mathcal{D} \cap \{0, 1, ..., b_l - 1\}} e(x(q^{\nu_l}\alpha + \beta))\right) \prod_{j=0}^{\nu_l - 1} \left(\sum_{y_j \in \mathcal{D}} e(y_j(q^j \alpha + \beta))\right) \\ &= e\left(\left(b_1 q^{\nu_1} + ... + b_{l-1} q^{\nu_{l-1}}\right)\alpha + (b_1 + ... + b_{l-1})\beta\right) \\ &\quad \times \left(\sum_{x \in \mathcal{D} \cap \{0, 1, ..., b_l - 1\}} e(x(q^{\nu_l}\alpha + \beta))\right) \prod_{j=0}^{\nu_l - 1} u_{\mathcal{D}}(q^j \alpha + \beta). \end{aligned}$$

Ainsi

$$|T_{N,l}(\alpha, \beta)| \leq |\mathcal{D}| \prod_{j=0}^{\nu_l - 1} |u_{\mathcal{D}}(q^j \alpha + \beta)| \leq q |\mathcal{D}|^{\nu_l} \prod_{j=0}^{\nu_l - 1} |\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(q^j \alpha + \beta)|. \tag{8.10}$$

Par conséquent, et comme $|\mathcal{D}| \geq 2$, on a pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{l\,:\nu_l \leq \frac{1}{2}\frac{\ln N}{\ln q}} |T_{N,l}(\alpha, \beta)| &\leq \sum_{l\,:\nu_l \leq \frac{1}{2}\frac{\ln N}{\ln q}} q|\mathcal{D}|^{\nu_l} \prod_{j=0}^{\nu_l - 1} 1 < q \sum_{j=0}^{+\infty} |\mathcal{D}|^{\frac{\ln N}{2\ln q} - j} \\
&\leq 2q|\mathcal{D}|^{\frac{\ln N}{2\ln q}} < 2q(|\mathcal{D}|^{\nu_1 + 1})^{\frac{1}{2}} < 2q^{\frac{3}{2}}(|\mathcal{D}|^{\nu_1})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2q^{\frac{3}{2}}|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|^{\frac{1}{2}}, \qquad (8.11)
\end{aligned}$$

puisqu'on a d'après les lemmes 3.2 et 3.4

$$|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \geq |\mathcal{D}|^{\nu_1}. \qquad (8.12)$$

D'autre part, lorsque $\nu_l > \frac{1}{2}\frac{\ln N}{\ln q}$, alors d'après (2.1)

$$\nu_l > \frac{1}{2}\frac{\ln N}{\ln q} > 2\frac{\ln m'}{\ln q} + 8,$$

de sorte que la condition (8.1) est satisfaite avec ν_l au lieu de ρ. Ainsi en utilisant les lemmes 8.1 et 8.2, à partir de (8.10) et l'inégalité de convexité $1 - x \leq e^{-x}$ (pour $x \geq 0$), pour $l \leq u$ vérifiant $\nu_l > \frac{1}{2}\frac{\ln N}{\ln q}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|T_{N,l}\left(\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right)\right| &\leq q|\mathcal{D}|^{\nu_l} \prod_{j=0}^{\nu_l - 1}\left(1 - \frac{64}{(q+1)^3}\left\|q^j\frac{t}{m'} + \frac{s}{m}\right\|^2\right) \\
&\leq q|\mathcal{D}|^{\nu_l} \exp\left(-\frac{64}{(q+1)^3}\sum_{j=0}^{\nu_l - 1}\left\|q^j\frac{t}{m'} + \frac{s}{m}\right\|^2\right) \\
&\leq q|\mathcal{D}|^{\nu_l} \exp\left(-\frac{16(q-1)^2}{5q^4(q+1)^3}\frac{\nu_l}{\ln m'}\right) \\
&\leq q|\mathcal{D}|^{\nu_l} \exp\left(-\frac{8(q-1)^2}{5q^4(q+1)^3\ln q}\frac{\ln N}{\ln mm'}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (2.1) et (8.12), pour $t \in \{1, ..., m' - 1\}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{l \leq u\,:\,\nu_l > \frac{1}{2}\frac{\ln N}{\ln q}} \left|T_{N,l}\left(\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right)\right| &\leq q\exp\left(-\frac{\ln N}{k_4 \ln mm'}\right)\sum_{j=0}^{+\infty}|\mathcal{D}|^{\nu_1 - j} \\
&\leq |\mathcal{D}|^{\nu_1}\exp\left(-\frac{\ln N}{k_5 \ln mm'}\right) \\
&\leq |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|\exp\left(-\frac{\ln N}{k_5 \ln mm'}\right), \qquad (8.13)
\end{aligned}$$

où $k_4,\ k_5$ dépendent de q et de $|\mathcal{D}|$.

Il découle de (8.9), (8.11) et (8.13) que pour (t, s) vérifiant (8.6), on a

$$\begin{aligned}
\left|T_N\left(\frac{t}{m'}, \frac{s}{m}\right)\right| &\leq 2q^{\frac{3}{2}}|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|^{\frac{1}{2}} + |\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|\exp\left(-\frac{\ln N}{k_{11}\ln mm'}\right) \\
&= \frac{1}{mm'}|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|\left(2mm'q^{\frac{3}{2}}|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|^{-\frac{1}{2}} + mm'\exp\left(-\frac{\ln N}{k_{11}\ln mm'}\right)\right).
\end{aligned} \qquad (8.14)$$

Comme $|\mathcal{D}| \geq 2$ et grâce à (8.12), alors il existe des constantes positives $k_6 = k_6(q)$ et $k_7 = k_7(q)$ telles que

$$|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \geq |\mathcal{D}|^{\nu_1} \geq 2^{\left\lfloor \frac{\ln N}{\ln q} \right\rfloor} > k_6 N^{k_7}. \tag{8.15}$$

En choisissant k_1 dans (2.1) assez petit, l'inégalité (2.2) s'en suit immédiatement d'après (2.1), (8.4), (8.8), (8.14) et (8.15), ce qui complète la preuve. □

9 Applications à l'équirépartition modulo 1

Cette partie est destinée aux applications des formules présentées au paragraphe 3 aux problèmes d'équirépartition des suites modulo 1.

On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}$ si pour tous a et $b \in [0, 1[$ tels que $a < b$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\{n < N,\ \{u_n\} \in [a, b[\} = b - a,$$

où $\{u_n\}$ désigne la partie fractionnaire du réel u_n.

Le critère de Weyl (voir [17] ou [23]) permet de ramener l'étude de l'équirépartition modulo 1 à l'estimation des sommes d'exponentielles:

Théorème *(Critère de Weyl). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e(hu_n) = 0.$$

Les résultats suivants sont des conséquences directes des majorations des sommes exponentielles T_N définies au paragraphe 4.

En premier lieu, on s'intéresse à un résultat concernant l'équirépartition modulo 1 de la suite $(S(n)\alpha)_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}}$.

Corollaire 9.1 *La suite $(S(n)\alpha)_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.*

Preuve En effet, si $\alpha \in \mathbb{Q}$ la suite $(S(n)\alpha)_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs modulo 1 et n'est donc clairement pas équirépartie modulo 1.

D'après le critère de Weyl, le corollaire 9.1 est ainsi équivalent au fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et pour tout $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$\sum_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} e(S(n)h\alpha) = o(|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|),$$

c'est à dire au fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a

$$\sum_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} e(S(n)\alpha) = o\left(|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|\right).$$

- Si $0 \in \mathcal{D}$, on écrit $N = l_1 q^{\nu_1} + ... + l_L q^{\nu_L}$ avec $\nu_1 = \left\lfloor \frac{\ln N}{\ln q} \right\rfloor$, $\nu_1 > ... > \nu_L$ et $l_i \in \{1, ..., q-1\}$ pour tout $i \in \{1, ..., L\}$. Ainsi

$$\sum_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} e(S(n)\alpha) = T_N(0, \alpha).$$

Il vient alors d'après le lemme 3.3 que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} e(S(n)\alpha)\right| &\leq \sum_{k=1}^{L}\left|T_{l_k q^{\nu_k}}(0,\alpha)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{L}\left|T_{l_k}(0,\alpha)\right|\left|T_{q^{\nu_k}}(0,\alpha)\right| \\ &\leq (q-1)\sum_{k=1}^{L}\prod_{j=0}^{\nu_k-1}\left|\sum_{d\in\mathcal{D}} e(d\alpha)\right|. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Mais, $\left|\sum_{d\in\mathcal{D}} e(d\alpha)\right| < |\mathcal{D}|$ et il suffit de poser $\rho = \dfrac{\ln\left|\sum_{d\in\mathcal{D}} e(d\alpha)\right|}{\ln|\mathcal{D}|}$ (sous réserve d'avoir $\left|\sum_{d\in\mathcal{D}} e(d\alpha)\right| \neq 0$, sinon le résultat est trivial) ce qui donne l'identité

$$\left|\sum_{d\in\mathcal{D}} e(d\alpha)\right| = |\mathcal{D}|^{\rho}.$$

Puis en reportant dans (9.1)

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} e(S(n)\alpha)\right| &\leq (q-1)\sum_{k=0}^{\nu_1}\prod_{j=0}^{k-1}|\mathcal{D}|^{\rho} \\ &\leq (q-1)\frac{|\mathcal{D}|^{\rho(\nu_1+1)}-1}{|\mathcal{D}|^{\rho}-1}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Mais, le lemme 3.2 permet d'écrire

$$|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \geq |\mathcal{D}|^{\nu_1},$$

ce qui permet de conclure, à partir de (9.2), que

$$\frac{\left|\sum_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} e(S(n)\alpha)\right|}{|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|} \leq (q-1)\frac{|\mathcal{D}|^{\rho}}{|\mathcal{D}|^{\rho}-1}|\mathcal{D}|^{(\rho-1)\left(\left\lfloor\frac{\ln N}{\ln q}\right\rfloor+1\right)},$$

et le résultat en découle immédiatement en faisant tendre N vers $+\infty$.

- Si $0 \notin \mathcal{D}$, on écrit $N = l_\nu q^\nu + \ldots + l_1 q + l_0$ avec $\nu = \left\lfloor\dfrac{\ln N}{\ln q}\right\rfloor$, $l_i \in \{0, \ldots, q-1\}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, \nu\}$ et $l_\nu \neq 0$, alors les lemmes 3.4 et 3.5 permettent d'établir les inégalités

$$|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)| \geq |\mathcal{D}|^{\nu},$$

et

$$\left|\sum_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)} e(S(n)\alpha)\right| = |T_N\,(0,\alpha)|$$
$$\leq q\sum_{k=0}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{k}\left(\sum_{d\in\mathcal{D}} e(d\alpha)\right)$$
$$\leq q\,\frac{|\mathcal{D}|^{\rho'}}{|\mathcal{D}|^{\rho'}-1}|\mathcal{D}|^{\rho'\nu},$$

où $\rho' = \dfrac{\ln\left|\sum_{d\in\mathcal{D}} e(d\alpha)\right|}{\ln|\mathcal{D}|} < 1$ et ainsi on arrive à établir le corollaire 9.1. □

Dans la même perspective, on peut énoncer le corollaire suivant qui constitue un cas particulier de [18, théorème 2], vu que la suite $(n)_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}},\,S(n)\equiv r \bmod m}$ est reconnaissable par un q-automate fini (voir [1] ou [18] pour une définition de cette notion).

Corollaire 9.2 *Soit* $m \geq 2$ *et* $r \in \mathbb{Z}$. *La suite* $(n\alpha)_{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}},\,S(n)\equiv r \bmod m}$ *est équirépartie modulo* 1 *si et seulement si* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Preuve En effet, le cas $\alpha \in \mathbb{Q}$ est à rejeter comme ci-haut et d'après le critère de Weyl tout revient à montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on a

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}}\\ S(n)\equiv r \bmod m}} e(n\alpha) = o(|\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(N)|).$$

Mais, le terme de gauche n'est autre qu'une combinaison des fonctions $T_N\left(\alpha,\frac{h}{m}\right)$ (où h est un paramètre décrivant l'ensemble $\{0,\ldots,m-1\}$) que l'on peut contrôler comme précédemment pour aboutir au résultat souhaité. □

Acknowledgments Travail effectué avec le soutien de l'Agence Nationale de la Recherche, Grant ANR-10-BLAN 0103 MUNUM.

References

1. J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003)
2. W.D. Banks, I.E. Shparlinski, Arithmetic properties of numbers with restricted digits. Acta Arith. 313–332 (2004)
3. S. Col, *Propriétés multiplicatives d'entiers soumis à des conditions digitales*. (Thèse pour l'obtention du titre de Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I en Mathématiques, 2006). http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/33/98/09/PDF/these-liens
4. S. Col, Diviseurs des nombres ellipséphiques. Period. Math. Hung. **58**, 1–23 (2009)
5. J. Coquet, On the uniform distribution modulo one of subsequences of polynomial sequences. J. Number Theory **10**(3), 291–296 (1978)
6. J. Coquet, On the uniform distribution modulo one of subsequences of polynomial sequences. II. J. Number Theory **12**(2), 244–250 (1980)

7. J. Coquet, Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition. J. Number Theory **16**, 363–375 (1983)
8. C. Dartyge, C. Mauduit, Nombres presque premiers dont l'écriture en base r ne comporte pas certains chiffres. J. Number Theory **81**, 270–291 (2000)
9. C. Dartyge, C. Mauduit, Ensembles de densité nulle contenant des entiers possédant au plus deux facteurs premiers. J. Number Theory **91**(2), 230–255 (2001)
10. P. Erdős, C. Mauduit, A. Sárközy, On arithmetic properties of integers with missing digits I : distribution in residue classes. J. Number Theory **70**, 99–120 (1998)
11. P. Erdős, C. Mauduit, A. Sárközy, On arithmetic properties of integers with missing digits II : prime factors. Discret. Math. **200**, 149–164 (1999)
12. M. Filaseta, S. Konyagin, Squarefree values of polynomials all of whose coefficients are 0 and 1. Acta Arith. LXXIV **3**, 191–205 (1996)
13. M.N.J. Fine, The distribution of the sum of digits (mod p). Bull. Am. Math. Soc. **71**, 2651–2652 (1965)
14. A.O. Gelfond, Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. Acta Arith. **13**, 259–265 (1968)
15. S. Konyagin, Arithmetic properties of integers with missing digits : distribution in residue classes. Period. Math. Hung. **42**(1–2), 145–162 (2001)
16. S. Konyagin, C. Mauduit, A. Sárközy, On the number of prime factors of integers characterized by digit properties. Period. Math. Hung. 37–52 (2000)
17. L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences* (Dover Publications, Mineola, 2006)
18. C. Mauduit, Automates finis et ensembles normaux. Ann. Inst. Fourier **36**, 1–25 (1986)
19. C. Mauduit, Multiplicative properties of the Thue–Morse sequence. Period. Math. Hung. **43**(1–2), 137–153 (2001)
20. C. Mauduit, C. Pomerance, A. Sàrközy, On the distribution in residue classes of integers with a fixed sum of digits. Ramanujan J. **9**(1–2), 45–62 (2005)
21. C. Mauduit, A. Sárközy, On the arithmetic structure of sets characterized by sum of digits properties. J. Number Theory **61**, 25–38 (1996)
22. C. Mauduit, A. Sárközy, On the arithmetic structure of the integers whose sum of digits is fixed. Acta Arith. **81**(2), 145–173 (1997)
23. G. Rauzy, *Propriétés statistiques des suites arithmétiques* (Presses Universitaires de France, Paris, 1976). Le Mathématicien, No. 15, Collection SUP